54. ročník soutěže

FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA

ve školním roce 2012 – 2013

řešení úloh pro kategorie A, B, C, D

Učitelům středních škol

Tento metodický materiál je určen těm vyučujícím fyziky na středních školách, kteří pracují jako referenti fyzikální olympiády nebo budou opravovat řešení úloh, jež zpracovali jejich studenti. Materiál tedy není určen přímo do rukou řešitelů FO, neboť je metodicky zpracován jako jedno z možných správných řešení, ne však jako řešení jediné nebo nejsprávnější. Je také doplněn návrhem na bodování protokolů o řešení, aby bylo možno lépe stanovit pořadí pro soutěžní účely.

Úspěšným řešitelem prvního kola se podle statutu FO stává ten řešitel, který vyřešil alespoň pět zadaných úloh alespoň na 5 bodů, přičemž se pokusil řešit praktickou úlohu, třeba i neúspěšně.

Jako součást soutěže Fyzikální olympiáda byly vydány studijní texty, jimiž v 54. ročníku jsou následující materiály, které jsou umístěny na webových stránkách FO:

Kategorie A: Kapoun: Modely atomu, Šedivý: Ohyb světla
Kategorie B: Kapoun: Aproximace ve fyzikálních úlohách
Kategorie C: Šedivý: Kruhový děj s ideálním plynem
Kategorie D: Jírů: Hybnost a energie při vzájemném působení těles

Studijní texty jsou vydány nakladatelstvím MAFY, Hradec Králové a distribuovány na školy sítí FO. Naše elektronická adresa:

`ivo.volf@uhk.cz`

Informace, texty úloh a studijní texty najdete na www stránkách:

`http://fyzikalniolympiada.cz`

Řešení úloh pro kategorie A, B, C, D připravila komise pro výběr úloh při ÚKFO České republiky pod vedením I. Volfa a P. Šedivého.

ISBN 80–86148–99–8

Řešení úloh 1. kola 54. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: J. Jírů (1), M. Jarešová (2), J. Thomas (4), P. Šedivý (3, 5, 6), M. Kapoun (7)

1. a) Pravidelný šestiúhelník o straně a lze složit ze šesti shodných rovnostranných trojúhelníků s délkou strany a (obr R1). Deska o hmotnosti $m_1 = m/6$ a tvaru tohoto trojúhelníku má moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm

$$J_0 = \frac{1}{36}m_1(a^2 + a^2 + a^2) = \frac{1}{12}m_1a^2.$$

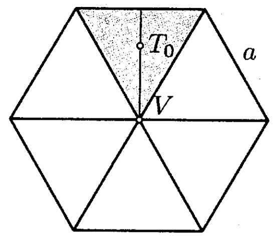
Posunutím osy otáčení z těžiště do vrcholu V dostaneme podle Steinerovy věty moment setrvačnosti

$$J_1 = \frac{1}{12}m_1a^2 + m_1\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \frac{5}{12}m_1a^2.$$

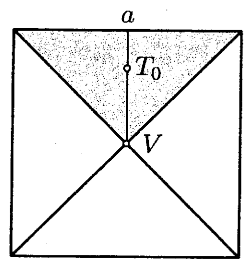
Moment setrvačnosti celého pravidelného šestiúhelníku vzhledem k ose procházející středem je

$$J_6 = 6J_1 = 6\cdot\frac{5}{12}m_1a^2 = \frac{5}{12}ma^2.$$

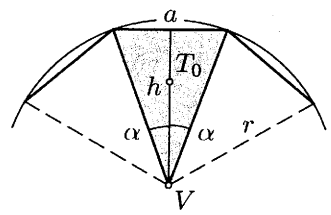
2 body



Obr. R1



Obr. R2



Obr. R3

b) Čtverec o straně délky a lze složit ze čtyř shodných pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků s přeponou délky a (obr. R2). Deska o hmotnosti $m_1 = m/4$ a tvaru tohoto trojúhelníku má moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm

$$J_0 = \frac{1}{36}m_1\left(2\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + a^2\right) = \frac{1}{18}m_1a^2.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející hlavním vrcholem je podle

Steinerovy věty

$$J_1 = \frac{1}{18}m_1a^2 + m_1\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}m_1a^2.$$

Moment setrvačnosti celé čtvercové desky vzhledem k ose procházející středem je

$$J_4 = 4J_1 = 4\cdot\frac{1}{6}m_1a^2 = \frac{1}{6}ma^2.$$

2 body

c) Pravidelný n-úhelník o poloměru r kružnice opsané lze složit z počtu n shodných rovnoramenných trojúhelníků se základnou délky a a s ramenem délky r (obr. R3). Deska o hmotnosti $m_1 = m/n$ a tvaru tohoto trojúhelníku má moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm

$$J_0 = \frac{1}{36}m_1(2r^2 + a^2).$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející hlavním vrcholem je podle Steinerovy věty

$$J_1 = \frac{1}{36}m_1(2r^2 + a^2) + m_1\left(\frac{2}{3}h\right)^2,$$

kde h je výška kolmá k základně. Označme dále 2α vrcholový úhel. Pak platí $h = r\cos\alpha,\quad a = 2r\sin\alpha$. Po dosazení dostaneme

$$J_1 = \frac{1}{36}m_1r^2(2 + 4\sin^2\alpha + 16\cos^2\alpha)$$

a pro celý mnohoúhelník

$$J_n = nJ_1 = \frac{1}{36}mr^2(2 + 4\sin^2\alpha + 16\cos^2\alpha).$$

Výraz lze upravit do dvou tvarů:

$$J_n = \frac{1}{6}mr^2(1 + 2\cos^2\alpha) = \frac{1}{6}mr^2(3 - 2\sin^2\alpha).$$

Vrcholový úhel 2α trojúhelníku splňuje podmínku $\alpha = \frac{\pi}{n}$. Moment setrvačnosti desky pravidelného n-úhelníku vzhledem k ose procházející středem je

$$J_n = \frac{1}{6}mr^2\left(1 + 2\cos^2\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{6}mr^2\left(3 - 2\sin^2\frac{\pi}{n}\right). \qquad (1)$$

4 body

d) Výsledek úlohy a) získáme ze vztahu (1) položením $n = 6$, $r = a$. Výsledek úlohy b) dostaneme ze vztahu (1) položením $n = 4$, $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$. **1 bod**

e) Pro moment setrvačnosti kruhové desky (též válce) užitím ve vzorci (1) jedné z limit

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n} = 0$$

dostaneme

$$J_\infty = \frac{1}{2}mr^2.$$

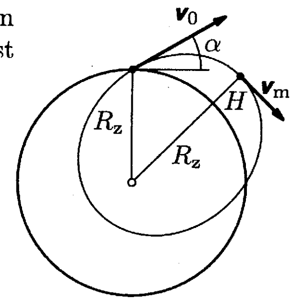
1 bod

2. a) K vyřešení této části vyjdeme z obr. R4. Užitím 2. Keplerova zákona můžeme pro plošnou rychlost psát

$$\frac{v_0R_z\cos\alpha}{2} = \frac{v_m(R_z + H)}{2}.$$

Dále platí zákon zachování mechanické energie

$$-\varkappa\frac{mM_z}{R_z} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\varkappa\frac{mM_z}{R_z + H} + \frac{1}{2}mv_m^2.$$



Obr. R4

Označíme $r = R_z + H$. Pak dostaneme

$$\begin{aligned} v_0R_z\cos\alpha &= v_mr, \\ -\varkappa\frac{M_z}{R_z} + \frac{1}{2}v_0^2 &= -\varkappa\frac{M_z}{r} + \frac{1}{2}v_m^2. \end{aligned}$$

Po dosazení za $v_0 = \frac{v_1}{2}$, kde $v_1 = \sqrt{\varkappa\frac{M_z}{R_z}}$, obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{2}R_z\cos\alpha &= v_mr, \\ -v_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v_1^2}{4} &= -v_1^2\frac{R_z}{r} + \frac{1}{2}v_m^2. \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $v_m = \frac{v_1}{2}\frac{R_z}{r}\cos\alpha$ a dosadíme do druhé rovnice. Po úpravě dostaneme

$$7r^2 - 8R_zr + R_z^2\cos^2\alpha = 0,$$

což je kvadratická rovnice v proměnné r. Jejím řešením dostaneme

$$r_{12} = \frac{1}{7}R_z\left(4 \pm \sqrt{16 - 7\cos^2\alpha}\right).$$

Pro $\alpha = 30°$ dostaneme $r_1 = 1{,}04\,R_z$, $r_2 = 0{,}10\,R_z$.
Vzhledem k tomu, že $H = r - R_z$, dostaneme v prvním případě $H_1 = 0{,}04\,R_z = 255$ km, ve druhém případě $H_2 = -0{,}90\,R_z = -5\,740$ km (což znamená, že je to pod povrchem Země - viz obr. R4).
Střela se při svém pohybu dostane do maximální výšky 255 km. **4 body**

b) Rychlost střely v okamžiku, kdy střela dosáhne maximální výšky, určíme užitím vztahu

$$v_m = \frac{v_1}{2}\frac{R_z}{r}\cos\alpha,$$

$$v_m = \frac{1}{2}\frac{R_z}{1{,}04\,R_z}\cdot\cos 30° v_1 = 0{,}42\,v_1 = 0{,}42\cdot 7{,}9\ \mathrm{km\cdot s^{-1}} = 3{,}3\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$

2 body

c) Budeme postupovat obdobně jako v případě a) a b), změna bude pouze v tom, že pak dosadíme $v_0 = v_1$. Dostaneme vztahy

$$\begin{aligned} v_1 R_z\cos\alpha &= v_m r, \\ -v_1^2 + \frac{1}{2}v_1^2 &= -v_1^2\frac{R_z}{r} + \frac{1}{2}v_m^2. \end{aligned}$$

Postupnými úpravami dostaneme kvadratickou rovnici

$$r^2 - 2rR_z + R_z^2\cos^2\alpha = 0,$$

z čehož $r_1 = (1 + \sin\alpha)\,R_z = 1{,}5\,R_z$, $r_2 = (1 - \sin\alpha)\,R_z = 0{,}5\,R_z$. Tomu odpovídají výšky $H_1 = 0{,}5\,R_z$, $H_2 = -0{,}5\,R_z$.
Rychlost střely v okamžiku, kdy střela dosáhne maximální výšky $H_1 = 0{,}5\,R_z$, opět určíme užitím vztahu

$$v_m = v_1\frac{R_z}{r_1}\cos\alpha = 0{,}58\,v_1 = 4{,}6\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$

4 body

Poznámka:

Při řešení této úlohy je možno také použít text *Šedivý, P. - Volf, I.: Pohyb tělesa po eliptické trajektorii v radiálním gravitačním poli.* Využitím vztahů uvedených na str. 15 se řešení úlohy zjednoduší.

3. a) Těžiště kyvadla se nachází ve vzdálenosti $\frac{2}{3}b\cos\varphi$ od osy kyvadla. Podle vzorce (1) má deska vzhledem k ose procházející těžištěm rovnoběžně s osou otáčení kyvadla moment setrvačnosti

$$J_0 = \frac{1}{36}m[2b^2 + (2b\sin\varphi)^2].$$

Moment setrvačnosti desky vzhledem k ose otáčení určíme užitím Steinerovy věty:

$$\begin{aligned} J = J_0 + m\left(\frac{2}{3}b\cos\varphi\right)^2 &= \frac{1}{18}mb^2(1 + 2\sin^2\varphi) + mb^2\frac{4}{9}\cos^2\varphi = \\ &= \frac{1}{6}mb^2(1 + 2\cos^2\varphi). \end{aligned}$$

Direkční moment kyvadla je $D = mg\frac{2}{3}b\cos\varphi$. Kyvadlo kývá s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{18}mb^2(3 + 6\cos^2\varphi)}{mg\frac{2}{3}b\cos\varphi}} = 2\pi\sqrt{\frac{b(1 + 2\cos^2\varphi)}{4g\cos\varphi}}.$$

5 bodů

b) Úpravou vztahu

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{b(1 + 2\cos^2\varphi)}{4g\cos\varphi}}$$

dostaneme kvadratickou rovnici a dosazením $b = 1{,}20$ m, $\tau = 1{,}00$ s, $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ dojdeme ke kvadratické rovnici

$$2{,}40\pi^2\cos^2\varphi - 39{,}24\cos\varphi + 1{,}20\pi^2 = 0.$$

Úloze vyhovuje kořen $\cos\varphi = 0{,}396\,93$, $\varphi = 66{,}6°$.

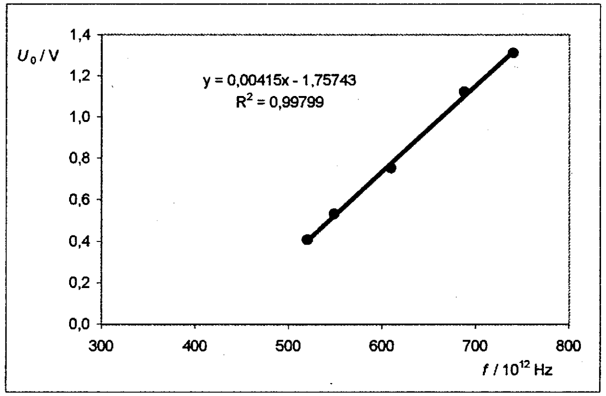
5 bodů

4.a) Tabulku naměřených hodnot vložíme do Excelu a doplníme ji o řádek s frekvencemi použitých spektrálních čar. Vytvoříme *XY bodový graf*, přidáme *spojnici trendu* a zobrazíme *rovnici regrese*, která má tvar

$$y = bx + a,$$

kde $y = U_0$, $x = \dfrac{f}{10^{12}}$. Pomocí statistické funkce LINREGRESE dopočítáme další statistické údaje, z nichž nás zajímají směrodatné odchylky koeficientů a a b.[1]

λ / nm	576,0	546,1	491,6	435,8	404,7
f / THz	520,5	549,0	609,8	687,9	740,8
U_0 / V	0,405	0,530	0,750	1,120	1,310



0,004151	-1,75743
0,000108	0,067489
0,997988	0,019915
1487,829	3
0,59009	0,00119

Docházíme k výsledkům

$$b = (0{,}004\,151 \pm 0{,}000\,108)\ \mathrm{V\cdot s}, \qquad a = (-1{,}757\,43 \pm 0{,}067\,49)\ \mathrm{V}.$$

4 body

b) Úpravou Einsteinovy fotoelektrické rovnice

$$hf = W_0 + \frac{1}{2}mv^2 = W_0 + U_0 e$$

dostaneme vztah

$$U_0 = \frac{h}{e}f - \frac{W_0}{e},$$

[1]Celý postup je podrobně vysvětlen na podobné úloze ve studijním textu Teplotní závislosti fyzikálních veličin na str. 28 až 31. Text se nachází na webových stránkách FO.

který porovnáme s rovnicí regrese:[2]

$$\frac{h}{e}f = bx = b\frac{f}{10^{12}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{be}{10^{12}} = (6{,}65 \pm 0{,}17)\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s},$$

$$-\frac{W_0}{e} = a \quad \Rightarrow \quad W_0 = -ae = (1{,}76 \pm 0{,}07)\ \mathrm{eV} = (2{,}82 \pm 0{,}11)\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

Pro mezní frekvenci a mezní vlnovou délku světla platí

$$hf_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = W_0 \quad \Rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{W_0}.$$

Relativní chyba takto vypočítané mezní vlnové délky je

$$\delta\lambda_0 = \sqrt{(\delta h)^2 + (\delta W_0)^2} = \sqrt{(\delta b)^2 + (\delta a)^2} = 0{,}0464.$$

Pak

$$\lambda_0 = 7{,}0855\cdot 10^{-7}(1 \pm 0{,}0464)\ \mathrm{m} = (709 \pm 33)\ \mathrm{nm}.$$

5 bodů

c) Mezní vlnová délka dané fotonky leží v červené oblasti spektra. V infračerveném oboru záření tedy fotonka nefunguje.

1 bod

5.a) Označme s stranu čtverce připadajícího na jeden pixel. Pak

$$s^2 = \frac{ab}{16{,}2\cdot 10^6} = \frac{370\ \mathrm{mm}^2}{16{,}2\cdot 10^6} = 2{,}28\cdot 10^{-5}\ \mathrm{mm}^2, \qquad s = 4{,}8\ \mu\mathrm{m}.$$

Stejná je i vzdálenost středů sousedních pixelů.

3 body

b) Poloměr středního kroužku při Fraunhoferově ohybu na kruhovém otvoru je

$$r = \frac{1{,}22\lambda f}{D},$$

kde λ je vlnová délka světla.

Zvolíme-li ohniskovou vzdálenost f_1, je $\dfrac{f_1}{D} = 1{,}35$ a vznikne kroužek o poloměru

$$r_1 = 1{,}22\lambda\frac{f_1}{D} = 1{,}22\cdot 550\cdot 10^{-9}\cdot 1{,}35\ \mathrm{m} = 0{,}9\cdot 10^{-3}\ \mathrm{mm},$$

což je asi pětina vzdálenosti středů sousedních pixelů.

[2]Tabulkové hodnoty elementárního náboje a rychlosti světla ve vakuu bereme jako přesné.

Zvolíme-li ohniskovou vzdálenost f_2, je $\frac{f_2}{D} = 5{,}6$ a vznikne kroužek o poloměru

$$r_2 = 1{,}22\lambda\frac{f_2}{D} = 1{,}22 \cdot 550 \cdot 10^{-9} \cdot 5{,}6 \text{ m} = 3{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ mm}.$$

V tomto případě je obsah světlého kroužku srovnatelný s obsahem čtverce vymezeného pro jeden pixel.

5 bodů

c) Pokud objektiv přicloníme, poměr f/D se zvětší a je roven clonovému číslu. Zvětší se i poloměr kroužku vzniklého zobrazením svítícího bodu. Záleží i na vlnové délce světla. Ve světle červeném bude poloměr kroužku větší, v modrém světle menší.

2 body

6. Energie kondenzátoru po překmitnutí obvodu je téměř rovna součtu energie kondenzátoru a cívky před rozepnutím spínače:

$$\frac{1}{2}CU_2^2 \approx \frac{1}{2}CU_1^2 + \frac{1}{2}LI^2, \qquad L = \frac{C\left(U_2^2 - U_1^2\right)}{I^2}.$$

Indukčnost cívky 1200 závitů z rozkladného transformátoru s uzavřeným jádrem je přibližně 1,6 H, s rovným jádrem 0,2 H.

7.a) Každý z elektronů je přitahován jádrem a odpuzován protějším elektronem. Výsledná síla směřuje k jádru a má velikost

$$F = k\frac{2e^2}{r^2} - k\frac{e^2}{4r^2} = \frac{7ke^2}{4r^2}, \qquad (1)$$

kde $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ je konstanta Coulombova zákona. Tato síla sehrává roli dostředivé síly, tedy

$$F = m\omega^2 r = \frac{7ke^2}{4r^2}. \qquad (2)$$

Po vynásobení druhého a třetího členu poloměrem r poznáváme v druhém členu kinetickou energii obíhající dvojice elektronů, proto platí:

$$E_\text{k} = 2 \cdot \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{7ke^2}{4r},$$

potenciální energie elektrostatická soustavy nábojů v atomu je

$$E_\text{p} = -2 \cdot k\frac{2e^2}{r} + k\frac{e^2}{2r} = -\frac{7ke^2}{2r},$$

takže celková energie atomu $E = E_\text{k} + E_\text{p} = -\frac{7ke^2}{4r}$ je záporná. Při úplné ionizaci atomu platí $W_1 + W_2 = |E| = \frac{7ke^2}{4r}$. Z toho

$$r = \frac{7ke^2}{4(W_1 + W_2)} = 0{,}0319 \text{ nm}.$$

Dosazením do (1) dostaneme $F = 3{,}97 \cdot 10^{-7}$ N.
Z (2) odvodíme

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{7ke^2}{4mr^3}}, \qquad f = \frac{e}{4\pi}\sqrt{\frac{7k}{mr^3}} = 1{,}86 \cdot 10^{16} \text{ Hz}.$$

6 bodů

b) Vlnová délka ve vakuu by měla být $\lambda = \frac{c}{f} = 16{,}1$ nm.

1 bod

c) Na elektron částečně ionizovaného atomu působí dostředivá síla o velikosti $F' = \frac{2ke^2}{r'^2} = m\omega'^2 r'$.

Má tedy kinetickou energii $E_\text{k}' = \frac{1}{2}m\omega'^2 r'^2 = \frac{ke^2}{r'}$.

Potenciální energie iontu je $E_\text{p}' = -\frac{2ke^2}{r'}$ a celková energie $E' = -\frac{ke^2}{r'}$.
Při druhé ionizaci pak platí

$$W_2 = |E'| = \frac{ke^2}{r'} \quad \Rightarrow \quad r' = \frac{ke^2}{W_2} = 0{,}0264 \text{ nm}.$$

3 body