

63. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

1. Pro daný výraz V platí

$$V = a(b + d) + c(b + d) = (a + c)(b + d).$$

Podobně lze upravit i obě dané podmínky:

$$2(a + c) - 5(b + d) = 4 \quad \text{a} \quad 3(a + c) + 4(b + d) = 6. \quad (1)$$

Zvolíme-li tedy substituci $m = a + c$ a $n = b + d$, dostaneme řešením soustavy (1) $m = 2$ a $n = 0$. Pro daný výraz pak platí $V = mn = 0$.

Závěr. Za daných podmínek nabývá výraz V pouze hodnotu 0.

Jiné řešení. Podmínky úlohy si představíme jako soustavu rovnic s neznámými a, b a parametry c, d . Vyřešením této soustavy (sčítací nebo dosazovací metodou) nalezneme $a = 2 - c$, $b = -d$ ($c, d \in \mathbb{R}$) a po dosazení do výrazu V dostáváme

$$V = (2 - c)(-d) - dc + cd + d(2 - c) = 0.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při postupu z prvního řešení udělte 2 body za rozklad výrazu V na součin, 2 body za úpravu podmínek na soustavu (1), 1 bod za její vyřešení a 1 bod za výpočet hodnoty V .

2. Pro uvažované součiny a a b jistě platí $a \cdot b = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Aspoň jedno z čísel a, b je proto dělitelné 2^4 , aspoň jedno dělitelné 3^2 , aspoň jedno dělitelné 5 a právě jedno dělitelné 7. Pro nejmenší společný násobek n čísel a, b proto platí $n \geq 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5\,040$, přitom rovnost zde nastane, právě když ani jedno z čísel a, b nebude dělitelné žádným z čísel $2^5, 3^3$ a 5^2 .

Zvolíme-li například $a = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ a $b = 1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5\,040$, bude nejmenší společný násobek obou čísel právě 5 040. Tím je ukázáno, že 5 040 je skutečně nejmenší ze všech možných hodnot n .

I když bylo úlohou nalézt pouze jeden příklad, pro úplnost uvedeme všechna rozdělení s minimální hodnotou $n = 5\,040$:

První skupina čísel	Druhá skupina čísel
2, 3, 4, 5, 6	1, 7, 8, 9, 10
3, 5, 6, 8	1, 2, 4, 7, 9, 10
2, 5, 8, 9	1, 3, 4, 6, 7, 10
1, 2, 3, 4, 5, 6	7, 8, 9, 10
1, 3, 5, 6, 8	2, 4, 7, 9, 10
1, 2, 5, 8, 9	3, 4, 6, 7, 10
2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 8, 9, 10
3, 5, 6, 7, 8	1, 2, 4, 9, 10
2, 5, 7, 8, 9	1, 3, 4, 6, 10
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	8, 9, 10
1, 3, 5, 6, 7, 8	2, 4, 9, 10
1, 2, 5, 7, 8, 9	3, 4, 6, 10

Najít je není těžké, uvážíme-li, že čísla 1 a 7 můžeme dát do libovolné z obou skupin, zatímco v téže skupině spolu nemohou být 4 s 8, 5 s 10, 3 s 9 ani 6 s 9; s 8 pohromadě může být právě jedno ze sudých čísel 2, 6 a 10. Získáme tak pouhá tři základní rozdělení (první tři řádky tabulky), z nichž lze každé čtyřmi způsoby doplnit čísla 1 a 7.

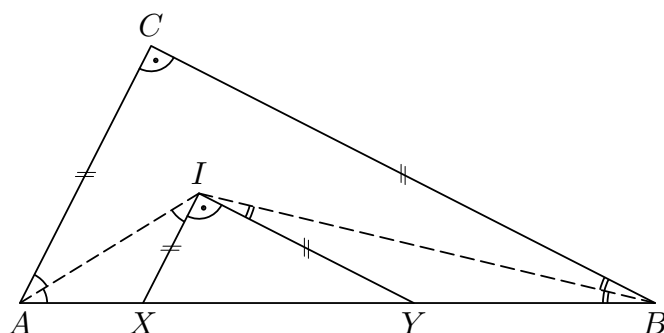
Poznámka. Úlohu lze vyřešit i bez výpočtu součinu $a \cdot b$. Dělitelnost n čísla 3^2 , 5 a 7 plyne z jejich přímého zastoupení mezi rozdělovanými čísly, dělitelnost číslem 2^4 ze snadné úvahy o rozdělení všech pěti sudých čísel: není-li číslo 8 ve své skupině jako sudé jediné, je vše jasné, v opačném případě jsou ve stejné skupině čísla 2, 4 a 6 (i 10, ale to už ani nepotřebujeme).

Za správně zdůvodněné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za rozklad součinu $10!$ na prvočinitele, 3 body za odhad nejmenšího společného násobku a 2 body za aspoň jedno správné rozdělení čísel (třeba i jen uhodnuté). Za nalezení všech 12 možných rozdělení udělte zvláštní pochvalu!

3. Trojúhelník AIX je rovnoramenný, neboť $|\sphericalangle IAX| = |\sphericalangle IAC| = |\sphericalangle AIX|$ (první rovnost plyne z podmínky, že bod I leží na ose úhlu BAC , druhá pak z vlastností střídavých úhlů, obr. 1). Je tedy $|AX| = |IX|$. Analogicky zjistíme, že $|BY| = |YI|$. Protože úsečky IX a IY svírají (stejně jako s nimi rovnoběžné úsečky CA a CB) pravý úhel, podle Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník XIY platí

$$|AX|^2 + |BY|^2 = |IX|^2 + |YI|^2 = |XY|^2,$$

což jsme měli dokázat.



Obr. 1

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za zdůvodnění rovností $|BY| = |YI|$ a $|AX| = |IX|$.