

Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}|x - 5| + |y - 9| &= 6, \\ |x^2 - 9| + |y^2 - 5| &= 52.\end{aligned}$$

ŘEŠENÍ. Z první rovnice dané soustavy plyne $|y - 9| = 6 - |x - 5| \leq 6$. Odtud dostáváme $3 \leq y \leq 15$, proto $y^2 - 5 \geq 4$, a tedy $|y^2 - 5| = y^2 - 5$. Z druhé rovnice dané soustavy máme $y^2 - 5 = 52 - |x^2 - 9| \leq 52$, tedy $y^2 - 5 \leq 52$, neboli $y^2 \leq 57 < 64$, takže $-8 < y < 8$. Z obou odhadů tak máme $3 \leq y < 8$, proto $|y - 9| = 9 - y$. Množina řešení dané soustavy v oboru reálných čísel je tak shodná s množinou řešení soustavy

$$|x - 5| + 9 - y = 6, \quad (1)$$

$$|x^2 - 9| + y^2 - 5 = 52 \quad (2)$$

v oboru vymezeném nerovnostmi $3 \leq y < 8$ (které zřejmě zaručují, že se v rovnicích (1) a (2) můžeme vrátit k původním absolutním hodnotám). Z rovnice (1) dostaneme $|x - 5| = y - 3$, což díky omezení $y < 8$ dává $|x - 5| < 5$ neboli $0 < x < 10$. Pro odstranění absolutních hodnot v nové soustavě rovnic tak rozlišíme pouze tři případy.

a) $0 < x < 3$. V tom případě z (1) plyne $y = 8 - x$. Dosazením do (2) dostaneme

$$9 - x^2 + (8 - x)^2 - 5 = 52$$

neboli $x = 1$. Příslušné $y = 8 - x = 7$ obě výchozí omezení $3 \leq y < 8$ splňuje.

b) $3 \leq x < 5$. I v tomto případě z (1) plyne $y = 8 - x$, dosazením do (2) však dostaneme

$$x^2 - 9 + (8 - x)^2 - 5 = 52,$$

což po úpravě dává kvadratickou rovnici $x^2 - 8x - 1 = 0$. Snadno ověříme, že tato rovnice nemá kořen splňující podmínku $3 \leq x < 5$.

c) $5 \leq x < 10$. V tomto případě z (1) plyne $y = x - 2$. Dosazením do (2) dostaneme

$$x^2 - 9 + (x - 2)^2 - 5 = 52,$$

což po úpravě dává $x^2 - 2x - 31 = 0$. Tato rovnice má dva reálné kořeny $1 \pm 4\sqrt{2}$, z nichž podmínku $5 \leq x < 10$ splňuje pouze kořen $x = 1 + 4\sqrt{2}$. Podle $y = x - 2$ dopočítáme $y = 4\sqrt{2} - 1$ a jako v bodě a) se přesvědčíme, že jsou splněna omezení, která jsme se soustavou rovnic (1) a (2) spojili: Nerovnosti $3 \leq 4\sqrt{2} - 1 < 8$ jsou jasné důsledky odhadu $1 < \sqrt{2} < 2$.

Díky našemu postupu můžeme i bez zkoušky konstatovat, že původně zadaná soustava rovnic má v oboru reálných čísel právě dvě řešení

$$(x; y) \in \{(1; 7), (4\sqrt{2} + 1; 4\sqrt{2} - 1)\}.$$

Poznámka. Zdůrazněme, že odvozenou podmínku $y \leq \sqrt{57}$ jsme v řešení zaměnili za slabší nerovnost $y < 8$ jen kvůli jednoduchosti dalších zápisů. Zmíňme rovněž, že ze způsobu odvození soustavy rovnic (1) a (2) je vidět, proč *každé* její řešení v oboru reálných čísel splňuje omezení $3 \leq y < 8$. Z rovnice (1) totiž plyne $9 - y \leq 6$ čili $y \geq 3$, z rovnice (2) pak $y^2 - 5 \leq 52$ neboli $|y| \leq \sqrt{57}$. Taková zmínka by neměla v úplném řešení podle uvedeného postupu chybět, jsou-li v bodech a) a c) vynechány závěrečné prověrky nerovností $3 \leq y < 8$ a není-li provedena závěrečná zkouška pro *původní* soustavu.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Řešte rovnici $|4x - 2| + |x - 2| = 6$. [Rovnice má dvě řešení $-\frac{2}{5}$ a 2.]
2. Nechtě pro reálná čísla x a y platí $|x^2 + 4| + |y^2 - 65| = 20$, potom $x \in \langle -4; 4 \rangle$ a $y \in \langle -9; -7 \rangle \cup \langle 7; 9 \rangle$. Dokažte.
3. V oboru reálných čísel řešte rovnici $2^{|x+1|} - 2^x = 1 + |2^x - 1|$. [63-B-S-1]
- D1. Určete všechna reálná čísla p , pro něž má rovnice $(x - 1)^2 = 3|x| - px$ právě tři různá řešení v oboru reálných čísel. [52-B-II-3]
- D2. Určete všechna reálná čísla s a t , pro která je grafem funkce

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + s}{t|x - 1| + x + 7}$$

lomená čára složená ze dvou polopřímek. [50-A-II-2]

- D3. Pro která reálná čísla a, b je funkce $f(x) = a|x - 1| + b(x - 3) + |x - b| + x - 1$ omezená? [49-B-S-1]

2. *Drak má n hlav, po jedné na každém z n krků uspořádaných do kruhu. Rytíř dokáže jedním úderem tít po k sousedních krcích a hlavy na nich setnout. Jestliže drakovi po úderu zbyde aspoň jedna hlava, může si nechat některou z chybějících hlav okamžitě dorůst. Dokažte, že když pro daná čísla n a k může rytíř draka zbavit všech hlav bez ohledu na to, jak mu dorůstají, svede to udělat nejvýše třemi údery.*

ŘEŠENÍ. Nejprve ukážeme, že pokud drak s alespoň $2k$ hlavami zvolí vhodnou strategii, rytíř ho nikdy nemůže zbavit všech hlav. Očíslujme krky draka dokola v kladném směru (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček) čísla od 1 do n , přitom $n \geq 2k$. V kladném směru je tak mezi krky s čísly 1 a $k + 1$ právě $k - 1$ krků, zatímco ve směru opačném je mezi nimi $n - k - 1 \geq k - 1$ krků. Protože rytíř může tít po k sousedních krcích, nemůže jedním úderem stít hlavy na krcích s čísly 1 a $k + 1$. Setne-li při nějakém úderu jednu z nich, drak si ji nechá dorůst (má na to nárok díky druhé z obou hlav). Tak si drak zajistí, že před každým úderem bude mít obě zmíněné hlavy, takže ho rytíř všech hlav nikdy nezabaví.

Přejdeme k případu, kdy platí opačná nerovnost $n < 2k$ neboli $n \leq 2k - 1$, a popíšeme dále, jak tehdy rytíř dokáže zbavit draka všech hlav nejvýše třemi údery. Pro $k = 1$ je $n \leq 2 - 1 = 1$ a v takovém případě stačí zřejmě rytíři jediný úder. Můžeme tedy předpokládat, že $k \geq 2$.

Také v případě, kdy $n \leq k$, umí rytíř prvním sekem stít všechny drakovy hlavy. Předpokládejme proto dále, že $k < n \leq 2k - 1$.

Nejprve ukážeme, že pokud má drak $n \leq 2k - 1$ krků, může rytíř stít libovolné dvě hlavy A, B jedním úderem. Nechtě mezi hlavami A a B je v kladném směru l hlav a v opačném směru m hlav. Potom $l + m = n - 2 \leq 2k - 3$. Pokud by obě čísla l a m byla alespoň $k - 1$, byl by jejich součet alespoň $2k - 2$, což není možné. Proto je aspoň jedno z čísel l nebo m nejvýše $k - 2$. Pokud tedy rytíř sekne přes k krků počínaje hlavou A pro $l \leq k - 2$ v kladném směru a pro $m \leq k - 2$ ve směru opačném, utne s hlavou A i hlavu B . Nyní už popíšeme strategii rytíře.

Rytíř prvním úderem setne k hlav a drakovi zůstane množina M sousedících hlav, která obsahuje $n - k \leq k - 1$ hlav. Druhým úderem rytíř setne všechny hlavy z množiny M . Mezitím drakovi mohly dorůst nejvýše dvě hlavy, ty ovšem rytíř umí utnout jedním úderem, jak jsme ukázali výše, a drak tedy po nejvýše třech úderech zůstane bez hlav. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Uvažujme situaci ze zadání úlohy 2. Nechť rytíř dokáže jedním úderem tít po 2 sousedních krcích.

a) Pokud má drak 3 hlavy, potom je rytíř schopen zbavit draka všech hlav dvěma údery. Popište rytířovu strategii.

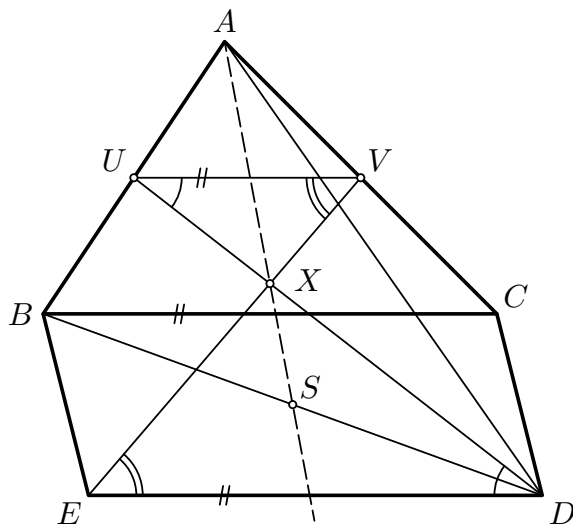
b) Dokažte, že pokud má drak 4 hlavy, potom si drak může nechat dorůstat hlavy tak, že ho rytíř nikdy nezabije všech hlav. Popište drakovu strategii.

[Označme hlavy draka dokola čísly 1, 2, ... a) Nechť rytíř prvním úderem setne hlavy 2 a 3. Drakovi zbývá hlava 1, proto si některou z useknutých hlav nechá dorůst. Ale každá z useknutých hlav sousedí s hlavou 1, a jakmile doroste, rytíř ji usekne spolu s hlavou 1 druhým úderem. b) Rytíř nemůže jedním úderem tít po krcích, na kterých jsou hlavy 2 a 4, současně však jedním úderem musí jednu z těchto dvou hlav setnout. Po každém úderu tedy drakovi zbyde buď hlava 2, nebo hlava 4 a drak si následně nechá druhou z těchto hlav dorůst.]

- D1. Na každé stěně krychle je napsáno právě jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme libovolné dvě sousední stěny krychle a čísla na nich napsaná zvětšíme o 1. Určete nutnou a postačující podmínku pro očíslování stěn krychle na počátku, aby po konečném počtu vhodných kroků byla na všech stěnách krychle stejná čísla. [60–A–I–5]

3. V trojúhelníku ABC označme U střed strany AB a V střed strany AC . V polorovině opačné k polorovině BCA uvažujme libovolný rovnoběžník $BCDE$. Označme X průsečík přímek UD a VE . Dokažte, že přímka AX dělí rovnoběžník $BCDE$ na dvě části téhož obsahu.

ŘEŠENÍ. Uvědomme si, že rovnoběžník je středově souměrný podle průsečíku úhlopříček. Libovolná přímka procházející tímto průsečíkem proto rozdělí rovnoběžník na dvě shodné oblasti se stejným obsahem. Označme S průsečík úhlopříček rovnoběžníku $BCDE$, je to zároveň střed úsečky BD (obr. 1). K důkazu, že přímka AX dělí rovnoběžník na dvě části téhož obsahu, tedy stačí ukázat, že prochází bodem S .



Obr. 1

Úsečka UV je střední příčkou trojúhelníku ABC , takže je rovnoběžná se stranou BC a má oproti ní poloviční délku. Strana ED rovnoběžníku $BCDE$ je rovněž rovnoběžná se stranou BC a má s ní shodnou délku. Úsečky UV a ED jsou tak rovnoběžné a je $|UV| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}|ED|$.

Úhly DUV a EDU jsou střídavé, tedy shodné, podobně jsou shodné i úhly EVU a DEV . Trojúhelníky UVX a DEX jsou proto podobné a platí $|UX|/|XD| = |UV|/|ED| = \frac{1}{2}$. Protože úsečka UD je těžnicí trojúhelníku ABD , plyne odtud, že

bod X je jeho těžištěm. Na přímce AX proto leží těžnice z vrcholu A trojúhelníku ABD , takže na ní leží i střed S protější strany BD .

Odtud již podle úvodního odstavce plyne, že přímka AX dělí rovnoběžník $ABCD$ na dvě (dokonce shodné) části téhož obsahu.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Dokažte, že přímka dělí rovnoběžník na dvě části stejného obsahu, právě když prochází jeho průsečíkem úhlopříček (*středem rovnoběžníku*). [Rovnoběžník je středově souměrný, přímka procházející jeho středem ho tedy dělí na dvě shodné části. Naopak, nechť daná přímka dělí rovnoběžník na dvě části stejného obsahu. V případě, že prochází dvěma sousedními stranami, vytne trojúhelník, jehož obsah je nejvýše polovina obsahu čtyřúhelníku, rovnost nastane v případě úhlopříčky. Pokud přímka prochází protějšími stranami, vzniknou dva lichoběžníky se stejnou výškou, ty mají shodný obsah, právě když mají shodný součet základů.]
2. Zopakujte si základní vlastnosti těžnic a těžiště trojúhelníku.
- D1. Lichoběžník $ABCD$ má základny AB a CD po řadě délek 18 cm a 6 cm. Pro bod E strany AB platí $2|AE| = |EB|$. Těžiště trojúhelníků ADE , CDE , BCE , jež označíme po řadě K , L , M , tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.
 - a) Dokažte, že přímky KM a CM svírají pravý úhel.
 - b) Vypočítejte délky ramen lichoběžníku $ABCD$.
- D2. Uvnitř rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod X . Sestrojte přímku, která prochází bodem X a rozděluje daný rovnoběžník na dvě části, jejichž obsahy se navzájem liší co nejvíce.

[60–C–II–3]

[61–A–III–4]

4. Nechť m je přirozené číslo, které má 7 kladných dělitelů, a n je přirozené číslo, které má 9 kladných dělitelů. Kolik dělitelů může mít součin $m \cdot n$?

ŘEŠENÍ. Nechť $r = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ je rozklad přirozeného čísla r na součin prvočísel, kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou navzájem různá prvočísla a $a_1, a_2, \dots, a_k$ kladná celá čísla. (Takový rozklad je až na pořadí prvočísel jednoznačný.) Každý dělitel d přirozeného čísla r je pak tvaru $d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, kde

$$0 \leq \alpha_1 \leq a_1, 0 \leq \alpha_2 \leq a_2, \dots, 0 \leq \alpha_k \leq a_k. \quad (1)$$

Počet dělitelů tedy přesně odpovídá počtu možností, jak vybrat k -tici nezáporných celých čísel $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ splňujících podmínky (1). Protože každé z čísel α_i můžeme vybrat právě $a_i + 1$ způsoby ($1 \leq i \leq k$), je podle kombinatorického pravidla součinu počet dělitelů přirozeného čísla r roven

$$\tau(r) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1). \quad (2)$$

Uvědomme si, že každý z činitelů v (2) je větší než 1. Protože číslo m má 7 dělitelů (číslo 7 je prvočíslo), má m prvočíselný rozklad tvaru $m = p^6$. Podobně všechna čísla n s devíti děliteli mají prvočíselný rozklad $n = q_1^8$ nebo $n = q_1^2 q_2^2$, kde $q_1 \neq q_2$. Skutečně, $3 \cdot 3$ je jediný rozklad čísla 9 na činitele větší než 1.

Probereme teď všechny možnosti, majíce na paměti, že prvočíslo p se může rovnat jednomu z prvočísel q_i .

A. Příklad $n = q_1^8$.

- a) Nechť $p \neq q_1$. Potom $mn = p^6 q_1^8$ je rozklad čísla mn na součin prvočísel. Číslo mn má v tomto případě $7 \cdot 9 = 63$ dělitelů.
- b) Nechť $p = q_1$. Potom $mn = p^6 p^8 = p^{14}$ je rozklad čísla mn na součin prvočísel. Číslo mn má v tomto případě 15 dělitelů.

B. Příklad $n = q_1^2 q_2^2$.

- Nechť $q_1 \neq p \neq q_2$. Potom $mn = p^6 q_1^2 q_2^2$ je rozklad čísla mn na součin prvočísel. Číslo mn má v tomto případě $7 \cdot 3 \cdot 3 = 63$ dělitelů.
- Některé z prvočísel q_1, q_2 je rovno p . Protože v rozkladu čísla n jsou ve stejných mocninách, stačí rozebrat jeden z těchto případů, např. $p = q_1$. Potom $mn = p^6 p^2 q_2^2 = p^8 q_2^2$ je rozklad čísla mn na součin prvočísel. Číslo mn má v tomto případě $9 \cdot 3 = 27$ dělitelů.

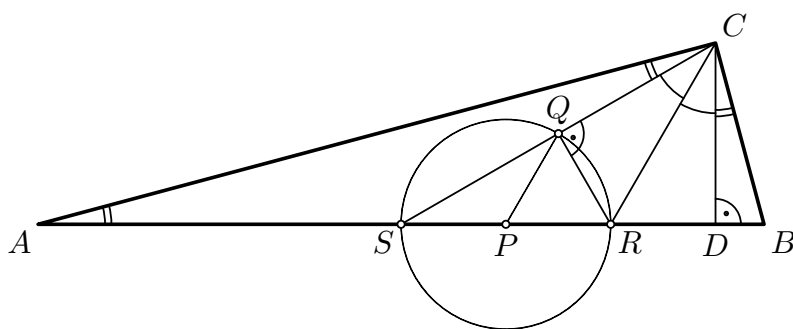
Počet dělitelů čísla mn může být 15, 27 nebo 63. Příslušný počet dělitelů dostaneme, vezmeme-li např. $m = 64 = 2^6$ a čísla n rovná $256 = 2^8$, $100 = 2^2 5^2$ nebo $225 = 3^2 5^2$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- Kolik kladných dělitelů mají čísla 24, 128 a 105? Kolik kladných dělitelů má součin každé dvojice těchto čísel? [Každé z čísel má 8 dělitelů, $24 \cdot 128$ má 22 dělitelů, $24 \cdot 105$ má 48 dělitelů, $128 \cdot 105$ má 64 dělitelů.]
 - Jaké jsou všechny možné rozklady čísla 8 kladnými děliteli na součin prvočísel? [p_1^7 , $p_1^3 p_2$, $p_1 p_2 p_3$.]
 - Určete nejmenší přirozené číslo s osmi kladnými děliteli. [Z výsledku předchozí úlohy plyne, že hledaným je číslo 24, nejmenší z čísel 2^7 , $2^3 \cdot 3$ a $2 \cdot 3 \cdot 5$.]
 - Nechť $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$ je rozklad přirozeného čísla n na součin prvočísel. Dokažte, že potom má číslo n právě $\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_s + 1)$ kladných dělitelů.
- D1. Označme $\tau(k)$ počet všech kladných dělitelů přirozeného čísla k a necht n je řešením rovnice $\tau(1,6n) = 1,6\tau(n)$. Určete hodnotu podílu $\tau(0,16n) : \tau(n)$. [48–A–I–4]

- Nechť S je střed přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC , který není rovno-ramenný. Označme D patu výšky z vrcholu C a R průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přeponou AB . Určete velikosti vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku, platí-li $|SR| = 2|DR|$.

ŘEŠENÍ. O daném trojúhelníku ABC budeme předpokládat, že z jeho odvěsen AC a BC je delší ta první, a že tedy úhel BAC (vyznačený dvěma obloučky na obr. 2) je menší než 45° . V opačném případě stačí v celém řešení včetně závěrečné odpovědi navzájem vyměnit vrcholy A a B .



Obr. 2

Protože trojúhelník ASC je rovnoramenný (bod S je středem Thaletovy kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku ABC), je $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle BAC|$. Pravoúhlé trojúhelníky ABC a CBD se shodují ve vnitřním úhlu při vrcholu B , jsou tedy podobné a plyne odtud shodnost úhlů BAC a BCD . Úhly ACS a BCD jsou tudíž shodné a menší než 45° , takže je do pravého úhlu ACB doplňuje nenulový úhel SCD , jehož osa je navíc shodná s osou celého úhlu ACB , což je polopřímka CR . Zároveň odtud plyne i shodnost úhlů SCR a DCR (a také to, že bod R leží mezi body S a D).

Označme P střed úsečky SR a Q patu kolmice z bodu R na přímkou SC . Pravoúhlé trojúhelníky CQR a CDR s pravými úhly při vrcholech Q a D se shodují ve velikostech vnitřního úhlu při vrcholu C a v délce (společné) přepony CR , jsou proto shodné a podle předpokladu úlohy tak platí $|QR| = |DR| = \frac{1}{2}|SR| = |PR|$. To znamená, že trojúhelník PRQ je rovnostranný, takže $|\sphericalangle PRQ| = 60^\circ$, $|\sphericalangle RSQ| = 30^\circ$ a $|\sphericalangle SCD| = 60^\circ$. Protože úhel při vrcholu C je pravý, vychází $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACS| = 15^\circ$ a $|\sphericalangle ABC| = 75^\circ$.

JINÉ ŘEŠENÍ. Stejně jako v předchozím řešení ukážeme, že CR je osou úhlu SCD . Tato osa dělí stranu SD trojúhelníku SCD ve stejném poměru, jako je poměr délek stran přilehlých k těmto úsekům (viz návodnou úlohu 1). Je tedy podle předpokladu úlohy

$$\sin |\sphericalangle CSD| = \frac{|CD|}{|CS|} = \frac{|RD|}{|RS|} = \frac{1}{2}.$$

Proto je velikost úhlu CSD rovna 30° a velikost úhlu BAC je 15° nebo 75° .

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Osa vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C protíná stranu AB v bodě R . Dokažte rovnost poměrů $|AC| : |BC| = |AR| : |BR|$. [Označme v velikost výšky trojúhelníku ABC procházející bodem C . Bod R leží na ose úhlu ACB , jeho vzdálenost od stran AC a BC je tedy stejná, označme ji r . Dvěma způsoby vyjádříme obsah trojúhelníku ARC , platí $\frac{1}{2}|AR|v = \frac{1}{2}|AC|r$. Podobně vyjádříme i obsah trojúhelníku BRC , platí $\frac{1}{2}|BR|v = \frac{1}{2}|BC|r$. Vydělením obou těchto rovností dostaneme požadovaný vztah.]
2. Pomocí velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku vyjádřete velikosti úhlů, které svírají výšky trojúhelníku s jednotlivými stranami a mezi sebou navzájem.
3. Je dána kružnice k se středem S . Kružnice l má větší poloměr než kružnice k , prochází jejím středem a protíná ji v bodech M a N . Přímka, která prochází bodem N a je rovnoběžná s přímkou MS , vytíná na kružnicích tětivy NP a NQ . Dokažte, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný. [59–C–II–3]
4. Pro vnitřní bod P strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC označme K a L paty kolmic z bodu P na přímkou AC a BC . Sestrojte takový bod P , pro který přímka CP pólí úsečku KL . [58–B–S–1]
5. Nechtě ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme K a L paty výšek z vrcholů A a B , M střed strany AB a V průsečík výšek trojúhelníku ABC . Dokažte, že osa úhlu KML prochází středem úsečky VC . [54–B–II–3]
- D1. Nechtě V je průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC . Přímka CV je společnou tečnou kružnic k a l , které se vně dotýkají v bodě V a přitom každá z nich prochází jedním z vrcholů A a B . Jejich průsečíky s vnitřky stran AC a BC označme P a Q . Dokažte, že polopřímka VC je osou úhlu PVQ a že body A , B , P , Q leží na jedné kružnici. [62–B–I–3]
- D2. V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD je kolmá ke straně AD . Označme M ($M \neq A$) průsečík přímky AC s kružnicí o průměru AD . Dokažte, že osa úsečky BM prochází středem strany CD . [56–B–II–3]
- D3. V libovolném ostroúhlém různoramenném trojúhelníku ABC označme O , V a S po řadě střed kružnice opsané, průsečík výšek a střed kružnice vepsané. Dokažte, že osa úsečky OV prochází bodem S , právě když jeden vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost 60° . [59–A–I–4]
- D4. Označme S střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC a P , Q paty kolmic z vrcholu C k přímkám, na kterých leží osy vnitřních úhlů BAC a ABC . Dokažte, že přímkou AB a PQ jsou rovnoběžné. [51–A–S–2]

6. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a , b , c platí

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Určete, kdy nastane rovnost.

ŘEŠENÍ. Nejprve dokážeme jednodušší nerovnost

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \quad (1)$$

pro libovolná dvě kladná čísla a, b . Jmenovatel prvního zlomku v (1) je zřejmě kladný, neboť

$$a^2 - ab + b^2 = (a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2 > 0.$$

Po vynásobení nerovnosti (1) kladnými jmenovateli všech zlomků na obou stranách dostaneme po úpravě ekvivalentní nerovnost

$$0 \leq a^4 - a^3b - ab^3 + b^4 = (a^3 - b^3)(a - b), \quad (1')$$

která je zřejmě splněna, protože

- a) v případě $a > b$ platí $a^3 > b^3$ a na pravé straně nerovnosti je součin dvou kladných reálných čísel;
- b) v případě $a = b$ je na pravé straně nerovnosti nula;
- c) v případě $a < b$ platí $a^3 < b^3$ a na pravé straně nerovnosti je součin dvou záporných reálných čísel.

Z této diskuse zároveň plyne, že rovnost nastane, právě když $a = b$.

Záměnou proměnných (a, b) v nerovnosti (1) proměnnými (b, c) , (c, a) dostaneme postupně nerovnosti

$$\frac{1}{b^2 - bc + c^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^2 - ca + a^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right), \quad (3)$$

v nichž nastane rovnost, právě když po řadě platí $b = c$ a $c = a$.

Sečtením nerovností (1), (2) a (3) tak dostaneme dokazovanou nerovnost

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Rovnost v ní nastane, právě když nastane rovnost ve všech třech užitých nerovnostech, tedy právě když $a = b = c$.

Poznámka. Nerovnost (1') můžeme dokázat řadou jiných postupů. Například ji můžeme upravit na ekvivalentní tvar

$$0 \leq (a - b)^2(a^2 + ab + b^2),$$

nebo můžeme použít permutační nerovnost¹ pro souhlasně uspořádané dvojice (a, b) , (a^3, b^3) , nebo můžeme užít nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem² pro dvě čtveřice $(\frac{1}{4}a^4, \frac{1}{4}a^4, \frac{1}{4}a^4, \frac{1}{4}b^4)$ a $(\frac{1}{4}a^4, \frac{1}{4}b^4, \frac{1}{4}b^4, \frac{1}{4}b^4)$ a výsledné nerovnosti sečíst, apod.

Z uvedeného postupu vyplývá, že dokazovaná nerovnost platí dokonce pro všechna nenulová reálná čísla a, b, c .

¹ Např. Herman J., Šimša J., Kučera R., *Metody řešení matematických úloh*, Masarykova univerzita Brno, 1996, str. 126–129.

² Např. Kufner A., *Nerovnosti a odhady, Škola mladých matematiků*, sv. 39, ÚV MO v nakladatelství Mladá fronta, Praha, 1989, kapitola I.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Dokažte nerovnost $a^2 - ab + b^2 > 0$ pro libovolná dvě reálná čísla a, b . [Nerovnost dostaneme jednoduchou úpravou na čtverec, nebo ukážeme že uvedený kvadratický trojčlen má v proměnné a záporný diskriminant.]
2. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí nerovnosti

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \quad a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2, \quad \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Kdy v nich nastane rovnost?

3. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

[Podle předcházející úlohy platí $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$. Podobně platí i $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ a $\frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)$. Sečtením těchto tří nerovností dostaneme požadovanou nerovnost, ve které nastane rovnost, právě když nastane rovnost ve všech užitých nerovnostech, tj. v případě $a = b = c$.]

4. Určete všechny dvojice $(x; y)$ reálných čísel, které vyhovují nerovnici

$$(x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2.$$

[63-B-I-2]

5. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a+b)} \leq \frac{a+b}{2},$$

a pro každou z obou nerovností zjistěte, kdy přechází v rovnost. [59-C-I-5]

6. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b a c platí nerovnost

$$\left(a + \frac{1}{b} \right) + \left(b + \frac{1}{c} \right) + \left(c + \frac{1}{a} \right) \geq 8.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. [55-B-S-1]

- D1. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí nerovnost

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}.$$

[49-A-II-3]

- D2. Dokažte, že pro každou trojici x, y, z kladných čísel platí nerovnost

$$\sqrt{xyz} \left(\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \right) \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. [47-B-I-3]

- D3. Dokažte, že pro každou trojici x, y, z nezáporných čísel platí nerovnost

$$x(x - \sqrt{yz}) + y(y - \sqrt{zx}) + z(z - \sqrt{xy}) \geq 0.$$

Zjistěte, kdy platí rovnost. [17-A-II-2]