

## 64. ročník matematické olympiády

### Řešení úloh krajského kola kategorie B

1. Číslo  $20^{15} = 2^{30}5^{15}$  je dělitelné pouze prvočísly 2 a 5, hledané číslo  $n$  musí tedy být tvaru  $n = 2^a5^b$ , kde  $a, b$  jsou přirozená čísla. Každý jeho kladný dělitel je tak tvaru  $2^\alpha5^\beta$ , kde  $\alpha \in \{0, 1, \dots, a\}$  a  $\beta \in \{0, 1, \dots, b\}$ , navíc z věty o jednoznačném rozkladu přirozeného čísla na součin prvočísel plyne, že pro různá  $\alpha, \beta$  dostáváme různé dělitele.

Pro každé  $\beta \in \{0, 1, \dots, b\}$  uvažujme nyní všechny dělitele čísla  $n$ , kteří jsou dělitelní číslem 5 právě v mocnině  $\beta$ . Jsou to

$$\underbrace{2^05^\beta, 2^15^\beta, 2^25^\beta, \dots, 2^a5^\beta}_{a+1 \text{ čísel}}$$

a jejich součin je

$$2^{0+1+2+\dots+a}5^{(a+1)\beta} = 2^{a(a+1)/2}5^{(a+1)\beta}.$$

Vynásobíme-li všechny tyto součiny pro  $\beta = 0, 1, \dots, b$ , dostaneme součin všech kladných dělitelů čísla  $n$ , který je tak roven

$$2^{a(a+1)(b+1)/2}5^{(a+1)b(b+1)/2}.$$

Odtud plyne, že pro nalezení čísla  $n$  stačí vyřešit v oboru přirozených čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a(a+1)(b+1) &= 30, \\ \frac{1}{2}(a+1)b(b+1) &= 15.\end{aligned}\tag{1}$$

Výrazy na obou stranách těchto rovnic jsou zřejmě nenulové, jejich vydělením dostaneme po úpravě  $a = 2b$ , dosazením do první rovnice soustavy pak

$$b(b+1)(2b+1) = 30.$$

Protože  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ , vidíme, že jedno řešení je  $b = 2$ . Protože funkce  $x(x+1)(2x+1)$  je na množině kladných čísel jako součin tří kladných rostoucích funkcí sama rostoucí, je toto řešení jediné. Soustava (1) má proto jediné řešení  $a = 4, b = 2$ , kterému odpovídá hledané přirozené číslo  $n = 2^45^2 = 400$ .

Existuje jediné přirozené číslo  $n$ , které vyhovuje podmínkám úlohy, a to  $n = 400$ .

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Z toho za poznatek, že každý dělitel čísla  $n$  je tvaru  $2^\alpha5^\beta$  udělte 1 bod, za nalezení jejich součinu udělte další 2 body, za sestavení soustavy (1) (či soustavy s ní ekvivalentní) další 1 bod, za její správné vyřešení a nalezení čísla  $n$  zbývající 2 body. Pokud z metody řešení (1) nebude vyplývat, že nalezené řešení je jediné a student to nezdůvodní, strhnete 1 bod. Pokud řešitel pouze dokáže, že číslo  $n = 400$  má požadovanou vlastnost bez náznaku jeho odvození, udělte 2 body (k těmto bodům nelze přičíst body podle předcházejícího schématu).

2. Užijeme známou nerovnost

$$a + \frac{1}{a} \geq 2,\tag{1}$$

která platí pro libovolné kladné reálné číslo  $a$ , protože vznikne algebraickou úpravou zřejmé nerovnosti  $(\sqrt{a} - 1/\sqrt{a})^2 \geq 0$ . Odtud také plyne, že rovnost v ní nastane, právě když  $a = 1$ .

Jednoduchou úpravou výrazu  $V$  dostaneme podle (1) pro kladné  $a = \frac{1}{2}(2x^2 + 1)$

$$V = \left( \frac{2x^2 + 1}{2} + \frac{2}{2x^2 + 1} \right) - \frac{1}{2} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Rovnost v této nerovnosti nastane, právě když  $\frac{1}{2}(2x^2 + 1) = 1$ , tj. právě když  $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ .

Nejmenší hodnota výrazu  $V$  je  $\frac{3}{2}$ , výraz této hodnoty nabývá pro  $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ .

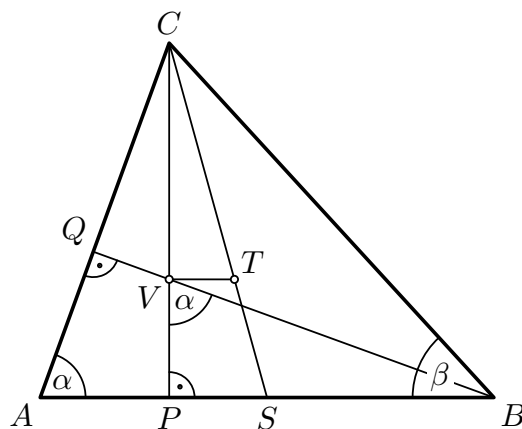
**Jiné řešení.** Úprava

$$\begin{aligned} V &= x^2 + \frac{2}{2x^2 + 1} = \frac{2x^4 + x^2 + 2}{2x^2 + 1} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}(2x^2 - 1)^2 + 3x^2 + \frac{3}{2}}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x^2 - 1)^2}{2x^2 + 1} + \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

jež je korektní pro každé reálné číslo  $x$ , ukazuje, že  $V \geq \frac{3}{2}$ , přitom rovnost nastane, právě když  $2x^2 - 1 = 0$  neboli  $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ .

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Nerovnosti typu (1) (odpovídající AG nerovnosti pro dvě nezáporná čísla) lze považovat za obecně známé a není třeba je dokazovat. Pokud nebudou (správně) určeny obě hodnoty  $x$ , pro které  $V$  nabývá svého minima, strhnete 2 body.

**3.** V trojúhelníku  $ABC$  označme  $V$  průsečík výšek,  $T$  těžiště,  $S$  střed strany  $AB$  a  $P$  a  $Q$  po řadě paty výšek z vrcholů  $C$  a  $B$  (obr. 1).



Obr. 1

V ostroúhlém trojúhelníku  $ABC$  leží body  $V$  a  $T$  uvnitř poloroviny  $ABC$  a bod  $P$  je vnitřním bodem úsečky  $AB$ . Pro  $\alpha \neq \beta$  jsou body  $V$  a  $T$  různé, a mají tak stejnou vzdálenost od strany  $AB$ , právě když je přímka  $VT$  rovnoběžná s přímkou  $AB$ . Vzhledem k tomu, že bod  $T$  dělí těžnici  $CS$  v poměru  $2 : 1$ , odvozená podmínka rovnoběžnosti bude splněna, právě když budou trojúhelníky  $CVT$  a  $CPS$  podobné, tj. právě když bude ve stejném poměru dělit i bod  $V$  výšku  $CP$ . Tuto podmínku vyjádříme rovností

$$\frac{|CP|}{|VP|} = 3. \quad (1)$$

V případě  $\alpha = \beta$  je  $P = S$  a těžiště  $T$  leží na výšce  $CP$ , proto body  $V$  a  $T$  mají od základny  $AB$  stejnou vzdálenost, právě když  $V = T$ , což právě vyjadřuje rovnost (1).

Zbývá tedy ukázat, že poměr délek úseček v (1) se dá vyjádřit jako součin tangent úhlů  $\alpha$  a  $\beta$ . V libovolném ostroúhlém trojúhelníku  $ABC$  platí, že pravoúhlé trojúhelníky  $ABQ$  a  $VBP$  se shodují ve vnitřním úhlu při vrcholu  $B$  (obr. 1), jsou tedy podobné a platí  $|\sphericalangle BVP| = \alpha$ . Z pravoúhlých trojúhelníků  $VBP$  a  $CBP$  plyne

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|BP|}{|VP|} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{|CP|}{|BP|},$$

proto obecně platí

$$\frac{|CP|}{|VP|} = \frac{|BP|}{|VP|} \cdot \frac{|CP|}{|BP|} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (2)$$

Nutnou a postačující podmínku (1) tak lze zapsat pomocí (2) jako  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 3$ . Tím je důkaz ukončen.

*Poznámka.* V případě  $\alpha = \beta$  lze ovšem postup z podaného řešení zjednodušit. Bod  $T$  totiž leží tehdy na výšce  $CP$ , takže má od strany  $AB$  stejnou vzdálenost jako bod  $V$ , právě když platí  $V = T$ , což je ekvivalentní s tím, že daný trojúhelník  $ABC$  je rovnostranný neboli že oba (shodné) úhly  $\alpha$  a  $\beta$  mají velikost  $60^\circ$ . A to je právě ten ostrý úhel, jehož tangens má velikost  $\sqrt{3}$ .

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho za odvození podmínky (1) udělte 3 body, za objev podobných trojúhelníků  $ABQ$  a  $VBP$  1 bod a za dopočet udělte zbývající 2 body. Chybí-li vysvětlení, že tvrzení platí i v případě  $\alpha = \beta$ , strhnete 1 bod. Jde-li naopak o jediný objasněný případ, udělte 1 bod.

**4.** Označme  $a, b, c$  koeficienty výsledné rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$ . Ta má dva různé reálné kořeny, právě když je její diskriminant (v symbolické podobě)

$$b^2 - 4ac = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}^2 - 4 \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

kladný.

Ukážeme, že vyhrávající strategii má Marek. Nejprve do jmenovatele zlomku pro koeficient  $b$  napíše 1.

- a) Pokud Tomáš obsadí ve svém prvním tahu jiné místo než v čitateli  $b$ , napíše do něj Marek v následujícím tahu největší zbývající číslo v seznamu (tedy 5 nebo 6). Hodnota  $b^2$  pak bude alespoň 25 a ze zbývajících čísel lze sestavit výraz  $4ac$  s hodnotou nejvýše  $4 \frac{6 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 16$ . Diskriminant vzniklé kvadratické rovnice tak bude jistě kladný.
- b) Předpokládejme, že Tomáš ve svém tahu doplní čitatele  $b$ . Marek poté ve druhém tahu napíše nejmenší zbývající číslo v seznamu (2 nebo 3) do čitatele  $a$  (nebo  $c$ ).
  - (i) V případě, že Tomáš v prvním tahu napsal do čitatele  $b$  číslo 2, je hodnota  $b^2$  rovna 4 a největší možná hodnota  $4ac$  (s přihlédnutím ke druhému Markovu tahu) je  $4 \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{5} < 4$ , proto diskriminant vzniklé kvadratické rovnice bude opět kladný.
  - (ii) V případě, že Tomáš v prvním tahu napsal do čitatele  $b$  jiné číslo než 2, je hodnota  $b^2$  alespoň 9 a hodnota  $4ac$  je nejvýše  $4 \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 4} = 4$ , takže diskriminant vzniklé kvadratické rovnice bude i v tomto případě kladný.

*Závěr.* V dané hře může vyhrát Marek nezávisle na tazích Tomáše. Jeho vítězná strategie je popsána výše.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za konstatování, že vyhrávající strategii má Marek tím, že napíše 1 do jmenovatele  $b$ , udělte 2 body. Zbývajících 4 body ohodnoťte úplnost zbývajících úvah.