

Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. V každé ze čtyř místností je několik předmětů. Necht $n \geq 2$ je přirozené číslo. Jednu n -tinu předmětů z první místnosti přeneseme do místnosti druhé. Následně jednu n -tinu (z nového počtu) předmětů přeneseme z druhé místnosti do třetí. Podobně pak ze třetí místnosti do čtvrté a ze čtvrté do první. (Vždy přitom přenášíme celé předměty.) Víte-li, že na konci byl v každé místnosti stejný počet předmětů, určete, kolik nejméně předmětů mohlo být na začátku ve druhé místnosti. Pro která n se tak může stát?

ŘEŠENÍ. Při analýze počtu předmětů po jednotlivých krocích budeme postupovat „odzadu“. Ukažme předně, jak lze z počtů předmětů ve dvou místnostech po předávce určit počty předmětů před ní. Řekněme, že v místnostech A a B je před předávkou z A do B postupně a a b předmětů. Tyto počty po předávce označme a' , b' . Podle zadání platí

$$a' = \frac{n-1}{n}a, \quad b' = b + \frac{1}{n}a.$$

Z první rovnosti a následně ze vztahu $a + b = a' + b'$ najdeme

$$a = \frac{n}{n-1}a', \quad b = b' - \frac{1}{n-1}a'.$$

Označme nyní M počet předmětů nacházejících se na konci v každé ze čtyř místností. Opakovaným užitím odvozeného vztahu $(a', b') \rightarrow (a, b)$ se dopravujeme až k vyjádření počátečních počtů pomocí hodnot M a n :

Na konci:	$M,$	$M,$	$M,$	$M;$
před $4 \rightarrow 1$:	$\frac{n-2}{n-1}M,$	$M,$	$M,$	$\frac{n}{n-1}M;$
před $3 \rightarrow 4$:	$\frac{n-2}{n-1}M,$	$M,$	$\frac{n}{n-1}M,$	$M;$
před $2 \rightarrow 3$:	$\frac{n-2}{n-1}M,$	$\frac{n}{n-1}M,$	$M,$	$M;$
před $1 \rightarrow 2$:	$\frac{n(n-2)}{(n-1)^2}M,$	$\frac{(n-1)^2+1}{(n-1)^2}M,$	$M,$	$M.$

Jelikož byl počet předmětů v první místnosti na začátku kladný, musí být $n \geq 3$. Nyní již snadno určíme nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$V_2 = \frac{(n-1)^2+1}{(n-1)^2}M.$$

Čitatel a jmenovatel zlomku se liší o jedna, a tak zlomek nelze krátit. Má-li vyjít celé číslo, musí tudíž být $M = k \cdot (n-1)^2$ pro vhodné k , a tedy $V_2 = k((n-1)^2+1)$.

Pro $n \geq 3$ je ovšem $(n-1)^2 + 1 \geq 5$, proto i $V_2 \geq 5$. Volbou $n = 3$, $k = 1$ a $M = 4$ pak dosáhneme hodnoty $V_2 = 5$, přičemž se snadno přesvědčíme, že odpovídající čtveřice $(3, 5, 4, 4)$ vyhovuje podmínkám úlohy: po jednotlivých předávkách z ní dostaneme čtveřici $(2, 6, 4, 4)$, pak $(2, 4, 6, 4)$, poté $(2, 4, 4, 6)$ a konečně $(4, 4, 4, 4)$. Hledaný minimální počet předmětů v druhé místnosti je tak opravdu 5 a lze jej dosáhnout pouze pro $n = 3$, neboť pro $n \geq 4$ je $V_2 \geq 3^2 + 1 = 10$.

Jiné řešení. Označme počáteční počty předmětů v místnostech po řadě a, b, c, d a postupně určujme počty předmětů v jednotlivých místnostech po jednotlivých předávkách.

$$\begin{array}{llll} \text{Na začátku:} & a, & b, & c, \quad d; \\ \text{po } 1 \rightarrow 2: & \frac{n-1}{n}a, & b + \frac{a}{n}, & c, \quad d; \\ \text{po } 2 \rightarrow 3: & \frac{n-1}{n}a, & \frac{n-1}{n}\left(b + \frac{a}{n}\right), & c + \frac{1}{n}\left(b + \frac{a}{n}\right), \quad d. \end{array}$$

Pro zjednodušení označme $t = b + a/n$ (zdůrazněme, že t je celé). Po dalším kroku $3 \rightarrow 4$ dostaneme čtveřici počtů:

$$\frac{n-1}{n}a, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}\left(c + \frac{t}{n}\right), \quad d + \frac{1}{n}\left(c + \frac{t}{n}\right).$$

Jelikož se počty předmětů ve druhé a třetí místnosti již dále nebudou měnit, můžeme je porovnat už nyní a zjistit tak, že

$$t = c + \frac{t}{n} \quad \text{neboli} \quad c = \frac{n-1}{n}t.$$

Jelikož n a $n-1$ jsou nesoudělná čísla, usoudíme, že n dělí t .

Po dosazení za c můžeme čtveřici po třetí předávce přepsat na

$$\frac{n-1}{n}a, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad d + \frac{t}{n},$$

a proto po posledním kroku kroku $4 \rightarrow 1$ dojdeme ke čtveřici

$$\frac{n-1}{n}a + \frac{1}{n}\left(d + \frac{t}{n}\right), \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}\left(d + \frac{t}{n}\right).$$

Protože má jít o čtyři stejná čísla, porovnáním třetího a čtvrtého z nich zjistíme, že

$$t = d + \frac{t}{n} \quad \text{neboli} \quad d = \frac{n-1}{n}t.$$

Díky tomu můžeme závěrečnou čtveřici ještě zjednodušit na

$$\frac{n-1}{n}a + \frac{1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}t.$$

To jsou čtyři stejná čísla, právě když platí

$$\frac{n-1}{n}a + \frac{1}{n}t = \frac{n-1}{n}t \quad \text{neboli} \quad a = \frac{n-2}{n-1}t.$$

Jelikož $a > 0$, je nutně $n \geq 3$. Navíc z nesoudělnosti čísel $n - 1$ a $n - 2$ plyne, že $n - 1$ dělí t . Ze vztahu $t = b + a/n$ lze nyní i b vyjádřit pouze pomocí t a n jako

$$b = \frac{(n-1)^2 + 1}{n(n-1)}t.$$

Jak už víme, obě nesoudělná čísla n a $n - 1$ dělí číslo t , takže je dělí i jejich součin, a proto $t \geq n(n-1)$. S ohledem na $n \geq 3$ tak získáváme odhad

$$b = \underbrace{((n-1)^2 + 1)}_{\geq 4} \cdot \underbrace{\left(\frac{t}{n(n-1)}\right)}_{\geq 1} \geq 5,$$

kde rovnost zřejmě nastává jediné pro $n = 3$ a $t = 6$. Pro taková n, t (odpovídající minimálnímu $b = 5$) z dříve odvozených vztahů dopočteme, že $a = 3, c = d = 4$. Zkouška díky uvedenému postupu není nutná.

Odpověď. Ve druhé místnosti muselo být minimálně pět předmětů a mohlo se tak stát pouze v případě $n = 3$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Přirozená čísla a, b nazveme nesoudělná, pokud je jejich největší společný dělitel roven 1, tedy $\text{nsd}(a, b) = 1$. Připomeňte si základní vlastnosti nesoudělných čísel:

- (a) Po sobě jdoucí přirozená čísla jsou nesoudělná.
- (b) Jsou-li $a, b, c \in \mathbb{N}$ a platí-li $\text{nsd}(a, b) = 1$ a $b \mid ac$, pak platí i $b \mid c$.
- (c) Jsou-li $a, b, c \in \mathbb{N}$ a platí-li $\text{nsd}(a, b) = 1, a \mid c$ a $b \mid c$, pak platí i $ab \mid c$.

N2. Řešte podobnou úlohu pro tři místnosti namísto čtyř.

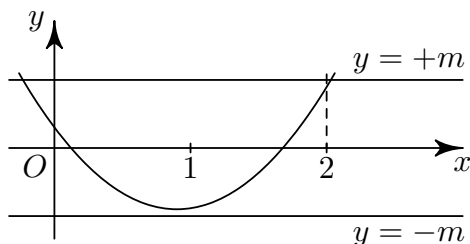
2. Nalezněte nejmenší reálné číslo m , pro něž lze najít reálná čísla a, b tak, aby nerovnost

$$|x^2 + ax + b| \leq m$$

platila pro každé $x \in \langle 0, 2 \rangle$.

ŘEŠENÍ. Na úvod si uvědomme, že žádné záporné číslo m požadavkům úlohy zjevně nevyhovuje (absolutní hodnota je nezáporné číslo).

Úlohu interpretujme geometricky. Podmínka ze zadání říká, že graf nějaké kvadratické funkce $y = x^2 + ax + b$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ má ležet v horizontálním pásu mezi přímkami $y = +m$ a $y = -m$ (obr. 1). Otázka pak zní: Do jakého nejtenčího pásu tohoto druhu lze graf nějaké takové funkce na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ „sevrít“?



Obr. 1

Dobrým kandidátem na nejtenčí pás se podle obr. 1 zdá být funkce

$$f(x) = (x-1)^2 - \frac{1}{2} = x^2 - 2x + \frac{1}{2},$$

pro niž $a = -2$ a $b = \frac{1}{2}$ a která, jak hned ukážeme, na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ splňuje nerovnosti $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

Skutečně, díky vyjádření $f(x) = (x-1)^2 - \frac{1}{2}$ se jedná o nerovnosti $0 \leq (x-1)^2 \leq 1$, jež platí zároveň právě pro $x \in \langle 0, 2 \rangle$. Kvadratická funkce $f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ tak vyhovuje podmínce úlohy pro $m = \frac{1}{2}$.

Ve druhé části řešení ukážeme, že pro žádné $m < \frac{1}{2}$ vyhovující kvadratická funkce neexistuje.

Klíčovým faktem pro nás bude, že pro libovolnou funkci $f(x) = x^2 + ax + b$ je alespoň jeden z rozdílů $f(0) - f(1)$ a $f(2) - f(1)$ větší či roven jedné. Odtud vyplyne, že šířka $2m$ svírajícího pásu¹ musí být větší nebo rovna jedné, a hodnoty $m < \frac{1}{2}$ tak skutečně lze vyloučit. Je-li totiž například $f(0) - f(1) \geq 1$ (v případě $f(2) - f(1) \geq 1$ bychom postupovali obdobně), obdržíme kýžený odhad $2m \geq 1$ snadno z všeobecně platné trojúhelníkové nerovnosti $|a - b| \leq |a| + |b|$:

$$1 \leq |f(0) - f(1)| \leq |f(0)| + |f(1)| \leq 2m.$$

K zakončení celého řešení tedy zbývá dokázat platnost alespoň jedné z nerovností $f(0) - f(1) \geq 1$ a $f(2) - f(1) \geq 1$ pro libovolnou $f(x) = x^2 + ax + b$. Jelikož

$$f(0) = b, \quad f(1) = 1 + a + b, \quad f(2) = 4 + 2a + b,$$

platí

$$\begin{aligned} f(0) - f(1) &= -1 - a \geq 1 && \Leftrightarrow && a \leq -2, \\ f(2) - f(1) &= 3 + a \geq 1 && \Leftrightarrow && a \geq -2. \end{aligned}$$

Alespoň jedna z nerovností $f(0) - f(1) \geq 1$ či $f(2) - f(1) \geq 1$ tedy platí vždy (bez ohledu na volbu čísel a, b).

Odpověď. Hledaná minimální hodnota m je $\frac{1}{2}$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Určete nejmenší reálné číslo m , pro něž platí $|x^2 - 2| \leq m$ pro každé $x \in \langle -2, 2 \rangle$.
- N2. Ukažte, že pro každou funkci $f(x) = x^2 + ax + b$ existují čísla $u, v \in \mathbb{R}$ taková, že $f(x) = (x - u)^2 + v$. Graf každé takové funkce je tedy posunutím paraboly $y = x^2$.
- N3. Jsou dána tři reálná čísla a, b, c , přičemž každá dvě se liší alespoň o 1. Ukažte, že pokud nějaké $m \in \mathbb{R}$ splňuje $|a| \leq m, |b| \leq m, |c| \leq m$, pak $m \geq 1$.
- N4. Ukažte, že pro libovolnou funkci tvaru $f(x) = x^2 + ax + b$ platí alespoň jedna z nerovností $f(-1) - f(0) \geq 1, f(1) - f(0) \geq 1$. Platí závěr i tehdy, pokud nahradíme trojici čísel $-1, 0, 1$ trojicí čísel $t-1, t, t+1$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$?
- D1. Rozhodněte, zda existují čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ taková, že rovnice $ax^2 + bx + c + t = 0$ má dva reálné kořeny, ať zvolíme parametr $t \in \mathbb{R}$ jakkoli.
- D2. Buďte a, b, c reálná čísla. Dokažte, že alespoň jedna z rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + (a-b)x + (b-c) &= 0, \\ x^2 + (b-c)x + (c-a) &= 0, \\ x^2 + (c-a)x + (a-b) &= 0, \end{aligned}$$

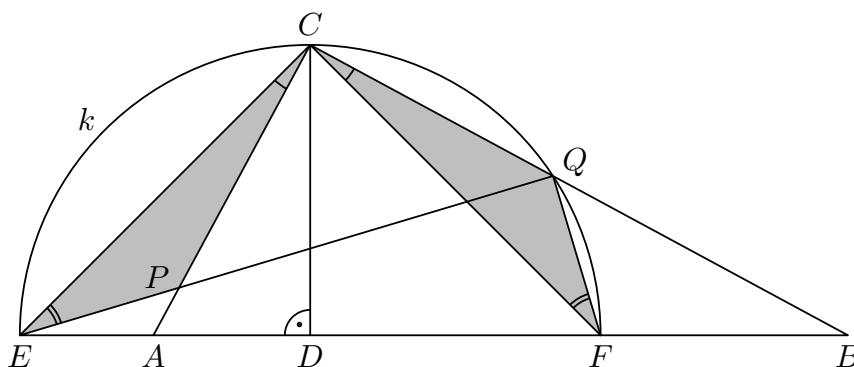
¹ Viz geometrickou interpretaci z úvodu řešení.

má reálný kořen. [Ruská MO 2007. Uvažte, že stačí, aby některá ze tří kvadratických funkcí z levých stran měla nekladnou hodnotu pro $x = 0$. Může se stát, že by hodnoty v nule vyšly všechny tři záporné?]

- D3. Necht $P(x)$ a $Q(x)$ jsou kvadratické trojčleny, pro které platí, že rovnice $P(Q(x)) = 0$ má kořeny $-22, 7, 13$. Určete čtvrtý kořen této rovnice, víte-li, že je celočíselný. [Ukažte, že z hodnot $Q(-22), Q(7), Q(13)$ musejí být dvě shodné. Co to pak znamená pro osu souměrnosti paraboly — grafu funkce $Q(x)$?]

3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB a delší odvěsnou BC . Necht D je pata výšky z vrcholu C . Kružnice k se středem D a poloměrem CD protíná odvěsnu BC v bodě Q a dále přímku AB v bodech E a F ($E \neq F$), kde F je bodem přepony AB . Úsečka QE protíná odvěsnu AC v bodě P . Dokažte, že $|PE| = |QF|$.

ŘEŠENÍ. Vidíme, že daná kružnice k je Thaletovou kružnicí s průměrem EF a středem D (obr. 2). Přitom trojúhelník EFC je zřejmě pravoúhlý rovnoramenný, proto $|EC| = |FC|$. Ukažme, že trojúhelníky EPC a FQC jsou shodné, čímž bude tvrzení úlohy dokázáno.



Obr. 2

Úhly CEQ a CFQ jsou shodné, neboť jde o obvodové úhly nad tětivou CQ kružnice k . Konečně oba úhly ECF a ACB jsou shodné (pravé), proto jsou shodné i jejich nepřekrývající se části, totiž úhly ECA a FCB (a tedy i úhly ECP a FCQ). Trojúhelníky EPC a FQC se tedy skutečně shodují podle věty *usu*.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Zopakujte si větu o středovém a obvodovém úhlu.
 N2. Je dán čtverec $ABCD$. Na kratším oblouku AB opsané mu kružnice zvolíme bod X tak, že $|\sphericalangle ADX| = 30^\circ$. Průsečíky úseček XC a XD se stranou AB označme postupně Y a Z . Určete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku XYZ .
 D1. Je dán čtverec $ABCD$. Na kratším oblouku AB opsané mu kružnice zvolíme bod X . Průsečík úsečky XC se stranou AB označme Y a průsečík úsečky XD s úhlopříčkou AC označme Z . Ukažte, že $YZ \perp AC$. [Nalezněte skrytou čtveřici bodů, co leží na jedné kružnici.]
 D2. Na stranách BC a CD čtverce $ABCD$ zvolme postupně body K a L tak, že $|\sphericalangle LAK| = 45^\circ$. Ukažte, že $|BK| + |DL| = |KL|$. [Otočte bod K o 90° kolem A a užití shodnosti vhodných trojúhelníků.]

4. Nela s Janou zvolí přirozené číslo k a následně hrají hru s tabulkou o rozměrech 9×9 . Začínající Nela pokaždé svým tahem vybere jedno prázdné políčko a vepíše do něj nulu. Zato Jana ve svém tahu do nějakého prázdného políčka napíše jedničku. Navíc po každém tahu Nely následuje k tahů Jany. Pokud se kdykoli během hry stane, že

součet čísel v každém řádku i v každém sloupci je lichý, vítězí Jana. Pokud dívka vyplní celou tabulku, aniž by se tak stalo, vítězí Nela. Nalezněte nejmenší hodnotu k , pro niž má Jana vítěznou strategii.

ŘEŠENÍ. Ukažme nejprve, že v případě $k = 3$ vyhraje Jana. Pracujme se čtverci A_1 , A_2 a A_3 o rozměrech 3×3 (obr. 3). Čtverec 3×3 považujeme za *pokrytý*, pokud se nachází v každém jeho řádku i sloupci právě jedna jednička. Pokud Jana pokryje čtverce A_1 , A_2 a A_3 , aniž zahraje do jiných čtverců, zajistí si výhru, neboť všechny řádkové i sloupcové součty budou rovny lichému číslu 1.

	A_1							

Obr. 3

Je zřejmé, že je-li po tahu Nely v některém čtverci 3×3 zapsána nejvýše jedna nula (a žádná jednička), může Jana díky hodnotě $k = 3$ tento čtverec trojicí svých tahů pokrýt. Strategie Jany je tedy následující: Pokud Nela svým tahem zahraje do některého nepokrytého čtverce A_1 , A_2 nebo A_3 , pokryje vzápětí Jana tento čtverec. V opačném případě pokryje Jana libovolný z dosud nepokrytých čtverců A_1 , A_2 a A_3 . Po prvních třech trojicích tahů Jana takto vždy zvítězí.

Tvrdíme, že v případech $k \in \{1, 2\}$ má vítěznou strategii Nela. Nejprve si uvědomme, že pokud nějaký tah nabízí Janě výhru (nazvěme jej *vítězný* tah), znamená to, že před jeho zahráním je lichý součet přesně v osmi sloupcích i osmi řádcích, přičemž onen vítězný tah je tahem Jany na průsečík jediného „sudého“ řádku s jediným „sudým“ sloupcem. Z toho vyplývá, že má-li kdy Jana vítězný tah, je pak takový tah přesně jeden.

Nyní je zřejmé, jak Nela dosáhne vítězství v případě $k = 1$. Má-li Jana po svém tahu k dispozici vítězný tah, Nela na ono políčko napíše nulu, a Jana tak o svoji (jedinou) možnost výhry v dalším tahu přijde. Nemá-li naopak Jana po svém tahu k dispozici vítězný tah, přepíše Nela dalším tahem nulu kamkoli. Tím se součty v řádcích ani sloupcích nezmění, takže Jana dalším tahem nevyhraje. Takto Nela dosáhne vyplnění celé tabulky, aniž by Janě dovolila vyhrát.

V případě $k = 2$ bude hrát Nela podle stejné strategie jako při $k = 1$, a zabrání tak tomu, aby Jana mohla někdy zvítězit po prvním ze své dvojice tahů. V tom druhém ovšem Jana nikdy vyhrát nemůže, neboť po jeho zahrání bude v tabulce celkem sudý počet jedniček, a bude tak vyloučeno, že by lichý počet jedniček byl v každém z (lichého počtu) devíti řádků.

Odpověď. Nejmenší hodnota k , pro niž má Jana vítěznou strategii, je $k = 3$.

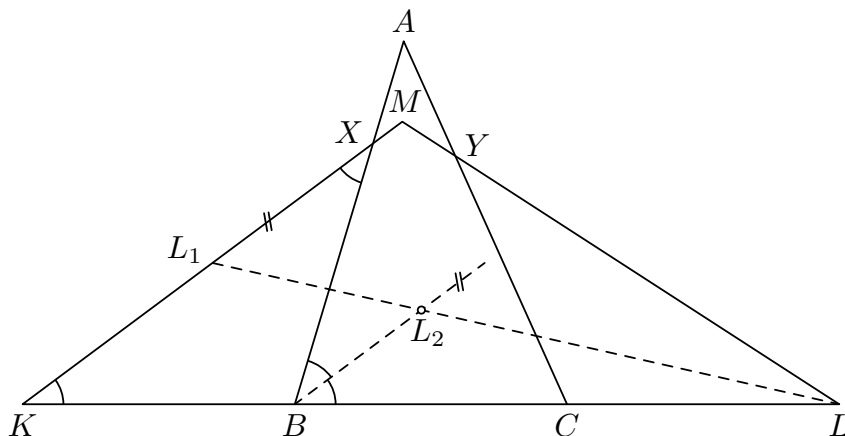
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Řešte danou hru nejprve v tabulce 3×3 .

- N2. Na kouzelném stromě vyrostlo 25 citronů a 30 pomerančů. Sadař utrhne každý den dva plody, poté přes noc vždy na stromě vyroste jeden nový plod, a to pomeranč (resp. citron), byly-li utržené plody stejné (resp. různé). Jaký plod vyroste na stromě poslední? [Citron — jejich počet je totiž po každé noci lichý.]
- D1. Simona a Lenka hrají hru. Pro dané celé číslo k takové, že $0 \leq k \leq 64$, vybere Simona k políček šachovnice 8×8 a každé z nich označí křížkem. Lenka pak šachovnici nějakým způsobem vyplní dvaatřiceti dominovými kostkami. Je-li počet kostek pokrývajících dva křížky lichý, vyhrává Lenka, jinak vyhrává Simona. V závislosti na k určete, která z dívek má vyhrávající strategii. [64–C–I–3]
- D2. V levém horním rohu šachovnice 8×8 stojí figurka krále. Dva hráči se střídají v tazích, přičemž každý svým tahem (legálním šachovým tahem) posune figurku na místo, na němž ještě nestála. Kdo nemá kam táhnout, prohrál. Ukažte, že hráč hrající jako první má vítěznou strategii. [Rozdělte šachovnici na obdélníčky 2×1 a nalezněte pro prvního hráče strategii, v níž do žádného obdélníčku netáhne jako první.]
- D3. V levém horním rohu šachovnice 8×8 stojí figurka koně. Dva hráči se střídají v tazích, přičemž každý svým tahem (legálním šachovým tahem) posune figurku na místo, na němž ještě nestála. Kdo nemá kam táhnout, prohrál. Ukažte, že začínající hráč má vyhrávající strategii. [Rozdělte šachovnici na obdélníčky 2×4 a v nich políčka rozdělte do dvojic se stejným úmyslem jako v úloze D2.]

5. Je dán trojúhelník ABC s nejkratší stranou BC . Na stranách AB , AC a na polopřímkách opačných k polopřímkám BC , CB zvolme postupně body X , Y , K , L tak, aby platilo $|BX| = |BK| = |BC| = |CY| = |CL|$. Přímky KX a LY se protínají v bodě M . Dokažte, že těžiště trojúhelníku KLM splývá se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC .

ŘEŠENÍ. Protože úhel ABC je vnějším úhlem rovnoramenného trojúhelníku XKB s hlavním vrcholem B (obr. 4), je zřejmě přímka KX rovnoběžná s osou úhlu ABC .



Obr. 4

Z hodnoty poměru $|LB| : |LK| = 2 : 3$ pak ovšem vyplývá, že zmíněná osa úhlu ABC prochází těžištěm trojúhelníku KLM . Pokud totiž označíme LL_1 jeho těžnici a L_2 její průsečík s osou úhlu ABC , pak z podobnosti trojúhelníků $\triangle LBL_2 \sim \triangle LKL_1$ (podle věty *uu*) získáme

$$\frac{|LL_2|}{|LL_1|} = \frac{|LB|}{|LK|} = \frac{2}{3}.$$

Bod L_2 tedy leží ve dvou třetinách těžnice LL_1 od vrcholu L , takže je skutečně těžištěm trojúhelníku KLM .

Ze symetrie zadání úlohy plyne, že také osa úhlu BCA prochází těžištěm trojúhelníku KLM . Jelikož průsečík os vnitřních úhlů trojúhelníku je středem jeho kružnice vepsané, je tvrzení úlohy dokázáno.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Ukažte, že v každém trojúhelníku ABC je osa vnitřního úhlu kolmá na osu vnějšího úhlu u téhož vrcholu.
- N2. Je dán trojúhelník ABC a jeho těžiště T . Rovnoběžka se stranou BC vedená bodem T oddělí menší trojúhelník ADE . Určete, jaký je poměr obsahů trojúhelníků ABC a ADE .
- D1. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a I_a střed kružnice připsané straně BC . Ukažte, že
- body B, C, I, I_a leží na kružnici s průměrem II_a [užijte výsledek úlohy N1],
 - střed úsečky II_a leží na ose úsečky BC ,
 - body dotyku kružnice vepsané a kružnice připsané straně BC se stranou BC jsou souměrně sdružené podle osy úsečky BC .
- D2. Je dán trojúhelník ABC s tupým úhlem při vrcholu C . Osa o_1 úsečky AC protíná stranu AB v bodě K , osa o_2 úsečky BC protíná stranu AB v bodě L . Průsečík os o_1 a o_2 označme O . Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku KLC leží na kružnici opsané trojúhelníku OKL . [64–A–II–1]
- D3. V tětiovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD . Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD . Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]

6. Na tabuli je napsán součin

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Pro která přirozená čísla $n \geq 2$ je možno za některé z činitelů dopsat vykřičník, a nahradit je tak jejich faktoriály, aby výsledný součin byl roven druhé mocnině přirozeného čísla?

ŘEŠENÍ. Podobně jako v návodných úlohách budeme značit exponent (případně nulový) u prvočísla p v prvočíselném rozkladu čísla n jako $v_p(n)$. Uvědomme si několik zřejmých poznatků:

- ▷ Pro všechna m, n a každé prvočísla p platí $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$.
- ▷ Pro každé prvočísla p platí $v_p(p!) = v_p(p) = 1$.
- ▷ Pro každé prvočísla p platí $v_p((p+1)!) = 1, v_p(p+1) = 0$.
- ▷ Pro každé prvočísla p a každé $n < p$ platí $v_p(n!) = v_p(n) = 0$.
- ▷ Číslo n je druhou mocninou přirozeného čísla, právě když $v_p(n)$ je sudé² pro každé prvočísla p .

Označme $S = n!$ počáteční hodnotu součinu na tabuli a S' jeho konečnou hodnotu po dopsání faktoriálů. Díky uvedeným vlastnostem funkcí v_p je jasné, že pokud je n rovno nějakému prvočíslu p , pak bude platit $v_p(S) = v_p(p!) = 1$ stejně jako $v_p(S') = 1$, neboť připsování faktoriálů zastoupení prvočísla $p = n$ v součinu čísel na tabuli nezvýší. Číslo $v_p(S')$ tak bude liché, a proto S' nebude druhou mocninou přirozeného čísla.

Ve druhé části řešení budeme naopak předpokládat, že dané číslo $n \geq 2$ není prvočísla (takže $n \geq 4$), a ukážeme, že faktoriály můžeme připsat tak, aby výsledný součin

$$S' = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \dots \cdot f_n,$$

kde f_k je jedno z čísel k nebo $k!$ pro každé k , byl druhou mocninou přirozeného čísla. To, jak víme, nastane, právě když v součinu S' bude každé prvočísla p zastoupeno se sudým

² Za sudé číslo považujeme i nulu.

exponentem $v_p(S')$. Protože samo n dle předpokladu prvočíslo není, součin S' jistě obsahuje pouze prvočísla menší než n . Jelikož každé takové prvočíslo p není zastoupeno v činitelích $f_1, f_2, \dots, f_{p-1}$ vůbec a v činiteli f_p právě jednou, příslušný mocnitel $v_p(S')$ je stejný jako mocnitel daného prvočísla p ve „zkráceném“ součinu

$$p \cdot f_{p+1} \cdot f_{p+2} \cdot \dots \cdot f_n. \quad (1)$$

Jak tedy zajistit, aby každé prvočíslo $p < n$ bylo v odpovídajícím součinu (1) zastoupeno se sudým exponentem? Protože v druhém činiteli f_{p+1} z (1) je prvočíslo p zastoupeno buď jednou (to když $f_{p+1} = (p+1)!$), nebo zastoupeno vůbec není (je-li naopak $f_{p+1} = p+1$), „správné“ zastoupení p v součinu (1) můžeme zajistit volbou hodnoty f_{p+1} , ať jsou následující hodnoty $f_{p+2}, \dots, f_n$ zadány jakkoli.³

Z předchozí úvahy už plyne konstrukce požadovaného výběru faktoriálů. Nejprve libovolně zvolíme hodnoty $f_k \in \{k, k!\}$ pro všechna taková $k \leq n$, pro něž číslo $k-1$ není prvočíslo. Ostatní hodnoty f_k , tedy hodnoty f_{p+1} , kde p je libovolné prvočíslo menší než n , pak budeme volit „odzadu“, tj. od největšího takového p po nejmenší.⁴ Vždy, když bude pro některé prvočíslo $p < n$ na řadě volba hodnoty f_{p+1} , tedy druhého činitele v součinu (1), budou již jeho ostatní činitelé určeni, a tak volbu f_{p+1} provedeme „správně“ ve smyslu předchozího odstavce.

Tím je konstrukce druhé mocniny S' završena a řešení celé úlohy hotovo.

Odpověď. Hledaná $n \geq 2$ jsou právě všechna složená čísla.

NÁVODNÉ A DOPLŇJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Jaký nejmenší násobek čísla 2016 je druhou mocninou přirozeného čísla?
- N2. Pro jaké nejmenší přirozené číslo n platí $2015 \mid n!$?
- N3. Kolika nulami končí číslo $2015!$?
- N4. Pro dané přirozené číslo n a prvočíslo p uvažme největší nezáporné celé číslo k , pro něž platí $p^k \mid n$. Toto číslo k budeme značit $v_p(n)$ a říkat mu p -valuace čísla n . Jiný pohled na věc je, že $v_p(n)$ značí exponent u prvočísla p v prvočíselném rozkladu čísla n . Pro libovolná přirozená čísla a, b ukažte následující:
 - (a) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$,
 - (b) $v_p(a^b) = bv_p(a)$.
 - (c) Přirozené číslo b je druhou mocninou, právě když $v_p(b)$ je sudé pro každé prvočíslo p .
 - (d) $a \mid b$, právě když $v_p(a) \leq v_p(b)$ pro každé prvočíslo p .
 - (e) Je-li $v_p(a) \neq v_p(b)$, pak platí $v_p(a+b) = \min(v_p(a), v_p(b))$.
- D1. Zjistěte, pro která přirozená čísla $n \geq 2$ je možno za některé z činitelů součinu

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

dopsat vykřičník tak, aby výsledný součin nebo jeho dvojnásobek byl roven *třetí* mocnině přirozeného čísla. [Hledaná jsou právě ta složená n , pro něž je i číslo $n-1$ složené.]

- D2. Ukažte, že pro každé přirozené číslo n a libovolné prvočíslo p platí vzorec

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \dots$$

- D3. Ukažte, že

$$v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1},$$

³ Platí to samozřejmě i pro případné prvočíslo $p = n-1$, kdy je činitel $f_{p+1} = f_n$ v součinu (1) poslední; tehdy musíme přirozeně volit $f_n = n!$.

⁴ Poslední tak bude volba f_3 odpovídající nejmenšímu prvočíslu $p = 2$.

kde $s_p(n)$ je ciferný součet čísla n zapsaného v soustavě o základu p . [Zapište n v soustavě o základu p jako $n = a_0 + a_1p + \dots + a_kp^k$, užijte výsledku D1 a pro určení koeficientů u každé z mocnin p pak sečtěte vhodnou geometrickou posloupnost.]

D4. Nalezněte všechna n přirozená, pro něž $2^{n-1} \mid n!$ [Užijte výsledku předchozí úlohy.]

D5. Ukažte, že pro libovolná přirozená čísla m, n je výraz

$$\frac{(2m)!(2n)!}{n!m!(m+n)!}$$

vždy roven celému číslu. [MMO 1972]

D6. Ukažte, že pro libovolná přirozená čísla m, n platí

$$v_p \left(\binom{n+m}{m} \right) = \frac{s_p(n) + s_p(m) - s_p(m+n)}{p-1},$$

kde opět $s_p(n)$ je ciferný součet čísla n zapsaného v soustavě o základu p . Souvisí výsledek s počtem „přenosů“ při písemném sčítání v soustavě o základu p ?