65. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Na tabuli jsou napsána různá přirozená čísla. Jejich aritmetický průměr je desetinné číslo, jehož desetinná část je přesně 0,2016. Jakou nejmenší hodnotu může tento průměr mít?
2. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1. Na jeho straně CD zvolíme bod E tak, aby platilo $|\sphericalangle BAE| = 60°$. Dále zvolme libovolný vnitřní bod úsečky AE a označme jej X. Bodem X pak veďme kolmici na přímku BX a její průsečík s přímkou BC označme Y. Jaká je nejmenší možná délka úsečky BY?
3. Kolika způsoby lze rozdělit množinu $\{1, 2, \dots, 12\}$ na šest disjunktních dvouprvkových podmnožin takových, že každá z nich obsahuje nesoudělná čísla (tedy taková, která nemají společného dělitele většího než jedna)?
4. Určete nejmenší reálné číslo m, pro něž lze najít reálná čísla a a b tak, aby nerovnost

$$|x^2 + ax + b| \leqq m(x^2 + 1)$$

platila pro každé $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 12. ledna 2016

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.