

65. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. Nejprve zjistíme, jak lze zapsat číslo 14 jako součet čtyř z daných čísel. Protože $4 + 3 \cdot 3 < 14 < 4 \cdot 4$, musí takový součet obsahovat aspoň dvě a nejvýše tři čtyřky. Dostáváme tak právě dvě možná vyjádření: $14 = 4 + 4 + 3 + 3$ a $14 = 4 + 4 + 4 + 2$.

Předpokládejme, že tabulku 3×3 máme korektně vyplněnou danými čísly, a zkoumejme, co pro ni musí platit. Víme, že každý ze čtyř čtverců 2×2 musí obsahovat buď čísla 4, 4, 4, 2, nebo čísla 4, 4, 3, 3. Soustředíme se na čtverce 2×2 , které obsahují číslo 2; pro takové čtverce máme pouze následující čtyři možnosti:

2	4
4	4

4	2
4	4

4	4
2	4

4	4
4	2

Ve kterém políčku tabulky 3×3 může být zapsáno číslo 2? Pokud by bylo zapsáno ve středním políčku, musely by být ve všech ostatních políčkách čtyřky a nezbylo by místo pro trojky:

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px; margin: 0 auto;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>					2					→	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px; margin: 0 auto;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr><tr><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>	4	4		4	2					→	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px; margin: 0 auto;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td></tr><tr><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td></tr><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>	4	4	4	4	2	4				→	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px; margin: 0 auto;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td></tr><tr><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td></tr><tr><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>	4	4	4	4	2	4	4	4		→	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px; margin: 0 auto;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td></tr><tr><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td></tr><tr><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td></tr></table>	4	4	4	4	2	4	4	4	4
	2																																																				
4	4																																																				
4	2																																																				
4	4	4																																																			
4	2	4																																																			
4	4	4																																																			
4	2	4																																																			
4	4																																																				
4	4	4																																																			
4	2	4																																																			
4	4	4																																																			

Pokud by bylo číslo 2 zapsáno uprostřed krajního řádku či sloupce tabulky, v sousedních políčkách by musely být čtyřky, jichž znovu nemáme dostatek:

<table style="display: inline-table;"><tr><td> </td><td>2</td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>		2								→	<table style="display: inline-table;"><tr><td>4</td><td>2</td><td> </td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>	4	2		4	4					→	<table style="display: inline-table;"><tr><td>4</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>	4	2	4	4	4	4			
	2																														
4	2																														
4	4																														
4	2	4																													
4	4	4																													

Proto jsou (obě) čísla 2 zapsána v rozích tabulky.

Pokud by byly dvojky v protějších rozích, znovu nevystačíme se čtyřkami:

<table style="display: inline-table;"><tr><td> </td><td> </td><td>2</td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr><tr><td>2</td><td> </td><td> </td></tr></table>			2				2			→	<table style="display: inline-table;"><tr><td> </td><td> </td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td> </td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td> </td></tr></table>			2	4	4		2	4		→	<table style="display: inline-table;"><tr><td> </td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td> </td></tr></table>		4	2	4	4	4	2	4	
		2																													
2																															
		2																													
4	4																														
2	4																														
	4	2																													
4	4	4																													
2	4																														

Zůstala tedy jediná možnost pro polohu čísel 2 — musí být v sousedních rozích. Následně doplníme samé čtyřky do dvou čtverců 2×2 , které obsahují tyto dvojky a do zbylých políček nám nezbyvá než vepsat zbývající tři trojky.

<table style="display: inline-table;"><tr><td>2</td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	2		2							→	<table style="display: inline-table;"><tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	2	4	2	4	4					→	<table style="display: inline-table;"><tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	2	4	2	4	4	4				→	<table style="display: inline-table;"><tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	2	4	2	4	4	4	3	3	3
2		2																																								
2	4	2																																								
4	4																																									
2	4	2																																								
4	4	4																																								
2	4	2																																								
4	4	4																																								
3	3	3																																								

Dostaneme tak první řešení, ve kterém je součet čísel ve všech čtyřech čtvercích 2×2 skutečně roven 14. Další tři řešení dostaneme volbou jiné dvojice sousedních rohů. Existují tak čtyři možnosti, jak tabulku vyplnit:

2	4	2
4	4	4
3	3	3

3	4	2
3	4	4
3	4	2

3	3	3
4	4	4
2	4	2

2	4	3
4	4	3
2	4	3

JINÉ ŘEŠENÍ. Stejně jako v předešlém řešení ukážeme, že číslo 14 je možné z daných čísel získat jako součet čtyř čísel pouze jako $4 + 4 + 4 + 2$ nebo $4 + 4 + 3 + 3$. Z toho dále plyne, že v každém čtverci 2×2 , který obsahuje číslo 2 (nebo 3) už žádná dvojka být nemůže. V prostředním čtverečku (který je součástí čtyř čtverců 2×2) nemůže být ani číslo 2 (nezbylo by místo pro trojky), ani číslo 3 (nezbylo by místo pro dvojky). V prostředním políčku musí tedy být číslo 4.

Z předešlého řešení víme, že v políčku sousedícím hranou s prostředním čtverečkem nemůže být číslo 2, neboť by oba čtverce 2×2 obsahující tuto dvojku obsahovaly už jen čtyřky, a těch nemáme dostatek. Uprostřed musí tedy být číslo 4 a v jednom z rohů číslo 2. Tím jsou určena čísla v odpovídajícím čtverci 2×2 tabulky:

2		
	4	

 $\longrightarrow$

2	4	
4	4	

Zůstalo nám pět nevyplněných políček, která mají obsahovat čísla 2, 3, 3, 3, 4. Číslo 3 se musí vyskytovat v alespoň jednom ze dvou čtverců 2×2 , které mají s již vyplněným čtvercem dvě společná políčka (a to dvakrát). Zvolme jeden z nich (při volbě druhého bude postup naprosto stejný a situace symetrická). Ostatní čísla pak můžeme vepsat už jen jediným způsobem, protože číslo 2 nemůže být ve stejném čtverci 2×2 s číslem 3:

2	4	3
4	4	3

 $\longrightarrow$

2	4	3
4	4	3
2		

 $\longrightarrow$

2	4	3
4	4	3
2	4	

 $\longrightarrow$

2	4	3
4	4	3
2	4	3

Otočením o násobek 90° dostaneme další tři odlišná vyplnění. Snadno nahlédneme, že jsou to všechny možnosti, které dostaneme jinou volbou počátečního rohu s dvojkou a volbou přilehlého čtverce s dvěma trojkami. Tabulku lze tedy vyplnit čtyřmi způsoby.

JINÉ ŘEŠENÍ. Označme čísla ve vyplněné tabulce podle obrázku písmeny od a po i a sepišme rovnice pro jednotlivé čtverce 2×2 :

a	b	c
d	e	f
g	h	i

 $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} a + b + d + e &= 14, & (1) \\ b + c + e + f &= 14, & (2) \\ d + e + g + h &= 14, & (3) \\ e + f + h + i &= 14. & (4) \end{aligned}$$

Řešme tuto soustavu rovnic, když víme, že čísla od a po i jsou v nějakém pořadí dvě dvojky, tři trojky a čtyři čtyřky. Číslo e se nachází ve všech čtyřech rovnicích. Pokud by bylo $e = 2$, měla by soustava rovnic (1)–(4) tvar

$$\begin{aligned}a + b + d &= 12, \\b + c + f &= 12, \\d + g + h &= 12, \\f + h + i &= 12,\end{aligned}$$

přičemž jediný způsob, jakým lze ze zbývajících čísel 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 součtem tří dostat číslo 12, je $4 + 4 + 4$, a tak by musela všechna ostatní čísla mít pouze hodnoty 4, což není možné.

Pokud by bylo $e = 3$, měla by soustava rovnic (1)–(4) tvar

$$\begin{aligned}a + b + d &= 11, \\b + c + f &= 11, \\d + g + h &= 11, \\f + h + i &= 11,\end{aligned}$$

přičemž jediný způsob, jakým lze ze zbývajících čísel 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4 součtem tří dostat číslo 11, je $4 + 4 + 3$, a tak by musela všechna ostatní čísla mít pouze hodnoty 4 a 3, což není možné (nemáme kam umístit dvojky).

Zjistili jsme, že musí být $e = 4$, a tak budeme hledat řešení soustavy

$$\begin{aligned}a + b + d &= 10, \\b + c + f &= 10, \\d + g + h &= 10, \\f + h + i &= 10,\end{aligned}$$

přičemž čísla a, b, c, d, f, g, h, i jsou v nějakém pořadí čísla 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4. Pokud tyto čtyři rovnice sečteme, dostaneme

$$\begin{aligned}(a + b + d) + (b + c + f) + (d + g + h) + (f + h + i) &= 40, \\(a + b + c + d + f + g + h + i) + b + d + f + h &= 40, \\(2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4) + b + d + f + h &= 40, \\b + d + f + h &= 15.\end{aligned}\tag{5}$$

Jediný způsob, jak dostat číslo 15 jako součet čtyř čísel z množiny $\{2, 3, 4\}$, je $4 + 4 + 4 + 3$. Proto jediné řešení rovnice (5) je takové, že jedno z čísel b, d, f, h je rovno třem a zbývajících jsou čtyřky. Pro každou ze čtyř možností již z rovnic (1)–(4) spolu s $e = 4$ jednoznačně dopočítáme řešení $a = 10 - b - d$, $c = 10 - b - f$, $g = 10 - d - h$, $i = 10 - f - h$, která odpovídají tabulkám

3	3	3
4	4	4
2	4	2

3	4	2
3	4	4
3	4	2

2	4	3
4	4	3
2	4	3

2	4	2
4	4	4
3	3	3

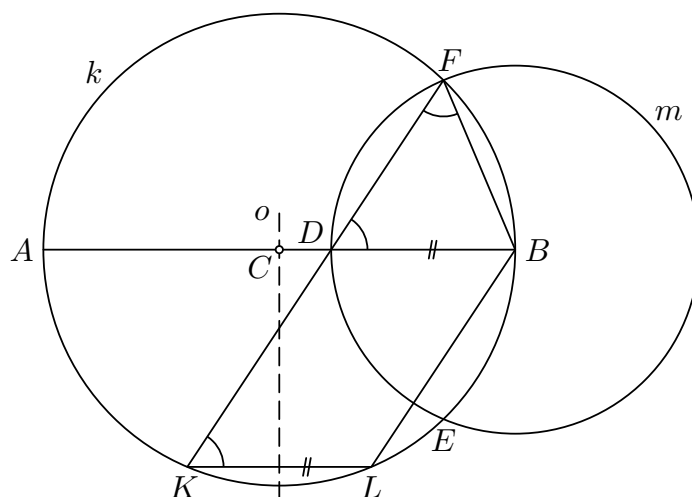
Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud řešitel postupuje prvním způsobem, udělte 1 bod za nalezení obou možných rozkladů $14 = 4 + 4 + 4 + 2 = 4 + 4 + 3 + 3$, druhý bod za vyloučení dvojky ve středu čtverce 3×3 , třetí bod za vyloučení dvojky „uprostřed strany“ čtverce 3×3 . Čtvrtý bod dejte za zjištění, že dvojky nemohou být v protějších rozích, pátý bod za první nalezené řešení a poslední bod za vypsání všech čtyř řešení.

Pokud řešitel postupuje druhým způsobem, udělte 1 bod za nalezení $14 = 4 + 4 + 4 + 2 = 4 + 4 + 3 + 3$, 2 body za určení čísla 4 ve středu čtverce 3×3 . Čtvrtý bod dejte za zjištění, že dvojky nemohou být „uprostřed strany“, pátý bod za prvé nalezené řešení a poslední bod za vypsání všech čtyř řešení.

Pokud řešitel postupuje třetím způsobem, udělte 3 body za zjištění hodnoty $e = 4$. Čtvrtý bod dejte za sčítání rovnic, pátý bod za objevení rovnice (5) a poslední bod za vypsání všech čtyř řešení. Pokud řešitel neuvede čtyři řešení, udělte nejvýše 5 bodů. Pokud řešitel postupuje jinak, snažte se hodnotit podobné milníky v řešení v souladu s uvedenými řešeními.

2. Body D i F leží na kružnici m se středem B , takže trojúhelník BDF je rovnoramenný a platí $|\sphericalangle BFK| = |\sphericalangle BDF| > 45^\circ$, neboť trojúhelník BDF je navíc ostroúhlý (obr. 1). To ovšem znamená, že bod K musí ležet v polorovině oA , kde o je osa úsečky AB , protože oblouk BK přísluší obvodovému úhlu většímu než 45° .

Bod L , který je díky podmínce $AB \parallel KL$ souměrně sdružený s K podle o , bude proto ležet v polorovině oB , tudíž KL a AB (a tedy i DB) budou souhlasně orientované rovnoběžné úsečky. Odtud plyne shodnost souhlasných úhlů LKF a BDF . Dohromady tak dostáváme $|\sphericalangle LKF| = |\sphericalangle BDF| = |\sphericalangle BFK|$.



Obr. 1

Přímky FB a KL jsou tedy souměrně sdruženy podle osy úsečky FK , která prochází středem C kružnice k , a je tudíž i její osou souměrnosti. Proto i průsečíky B a L těchto přímek s kružnicí k jsou souměrně sdruženy podle této osy, takže čtyřúhelník $KLBF$ je rovnoramenný lichoběžník, čili $|KL| = |BF|$. Spojením s rovností $|BF| = |BD|$ poloměrů kružnice m tak dostáváme požadovanou rovnost

$$|KL| = |BF| = |BD|.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za uvedení každé z rovností úhlů $|\sphericalangle BFK| = |\sphericalangle BDF|$ a $|\sphericalangle LKF| = |\sphericalangle BDF|$ udělte po 2 bodech. Dalšími dvěma body odměňte řešitele za důkaz toho, že $KLBF$ je rovnoramenný lichoběžník, resp. za to, že $|KL| = |BF|$. Poznatek, že body B a L leží na stejné straně od přímky KF , lze považovat za očividný, a tak může být v řešení využít mlčky.

3. Nejprve si všimněme, že záměnou hodnot a a b se hodnota posledních dvou uvažovaných výrazů nezmění, zatímco pořadí prvních dvou se změní na opačné. Čísla a a b jsou různá, můžeme proto předpokládat, že je $a < b$. Pro $a > b$ tak výměnou čísel a a b mezi sebou dostaneme již některé nalezené pořadí, v němž budou vyměněny hodnoty $1 + a$ a $1 + b$.

Protože čísla a a b jsou různá, leží jejich aritmetický průměr mezi nimi, je tedy pro $a < b$ vždy

$$1 + a < 1 + \frac{a + b}{2} < 1 + b.$$

Zbývá zjistit, na které místo lze (za uvedeného předpokladu) zařadit hodnotu posledního výrazu. Kupříkladu pro $a = 2$ a $b = 4$ máme zařadit hodnotu 4,5 mezi čísla $3 < 4 < 5$. Vidíme, že jedno z možných uspořádání všech čtyř uvažovaných hodnot je

$$1 + a < 1 + \frac{a + b}{2} < \frac{a^2 + b^2 - 2}{a + b - 2} < 1 + b. \quad (1)$$

Jak jsme již předeslali, první nerovnost platí za předpokladu $a < b$ vždy. Ukážeme, že další dvě nerovnosti v (1) rovněž platí obecně pro libovolná a, b , $1 < a < b$.

Každou z obou nerovností vynásobíme kladným výrazem $a + b - 2$. Ekvivalentními úpravami levé nerovnosti dále dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{2 + a + b}{2} \cdot (a + b - 2) &< a^2 + b^2 - 2, \\ (a + b)^2 - 4 &< 2(a^2 + b^2 - 2), \\ 0 &< a^2 + b^2 - 2ab, \\ 0 &< (a - b)^2, \end{aligned}$$

což je nerovnost, která pro $a \neq b$ platí vždy.

Úpravou pravé nerovnosti pak dostaneme

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2 &< (1 + b)(a + b - 2), \\ a^2 + b^2 - 2 &< a + b - 2 + ab + b^2 - 2b, \\ 0 &< -a^2 + ab + a - b, \\ 0 &< a(b - a) - (b - a) = (b - a)(a - 1), \end{aligned}$$

což díky nerovnostem $1 < a < b$ platí rovněž.

S ohledem na symetrii zmíněnou v úvodu tak dostáváme dvě možná uspořádání uvažovaných hodnot:

$$\begin{aligned} 1 + a &< 1 + \frac{a + b}{2} < \frac{a^2 + b^2 - 2}{a + b - 2} < 1 + b, & \text{pokud } a < b, \\ 1 + b &< 1 + \frac{a + b}{2} < \frac{a^2 + b^2 - 2}{a + b - 2} < 1 + a, & \text{pokud } b < a. \end{aligned}$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za správnou pozici hodnoty $1 + (a + b)/2$ mezi čísly $1 + a$ a $1 + b$ udělte 1 bod. Důkaz každé z dalších dvou nerovností (1) oceňte dvěma body. Poslední bod udělte za uvedení obou možných uspořádání.