

65. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

1. V rovnici ze zadání

$$1\,000a + 100b + 10c + d = 20(10a + b) + 16(10c + d)$$

mají neznámé číslice a a b větší koeficienty na levé straně, zatímco číslice c a d na straně pravé. Proto rovnici upravíme do tvaru $800a + 80b = 150c + 15d$, který po vydělení pěti a vytknutí menších koeficientů obou stran přepíšeme jako $16(10a + b) = 3(10c + d)$. Odtud díky nesoudělnosti čísel 3 a 16 plyne, že $10c + d$ je dvojmístný násobek čísla 16. Ten je ovšem větší než 48, neboť $3 \cdot 48 = 144$, zatímco $16(10a + b) \geq 160$ (číslíce a musí být nenulová). Jako hodnoty $10c + d$ tak připadají v úvahu pouze násobky 16 rovné 64, 80 a 96, čísla určující svým zápisem číslice c a d . Dosazením do rovnice $16(10a + b) = 3(10c + d)$ dostaneme pro dvojmístné číslo $10a + b$ po řadě hodnoty 12, 15 a 18.

Odpověď. Vyhovují tři čísla 1 264, 1 580 a 1 896.

Poznámka. Namísto čtyř neznámých číslic a, b, c, d lze k zápisu rovnice ze zadání využít zřejmě rovnou obě dvojmístná čísla $x = \overline{ab}$ a $y = \overline{cd}$. Rovnice pak bude mít tvar $100x + y = 20x + 16y$, který podobně jako v původním postupu upravíme na $80x = 15y$ neboli $16x = 3y$. Nyní místo vztahu $16 \mid y$ můžeme využít druhý podobný důsledek $3 \mid x$ a uvědomit si, že z odhadu $y \leq 99$ plyne $16x \leq 3 \cdot 99 = 297$, odkud $x \leq 18$, což spolu s odhadem $x \geq 10$ vede k možným hodnotám $x \in \{12, 15, 18\}$. Z rovnice $16x = 3y$ pak už dopočteme $y = 64$ pro $x = 12$, $y = 80$ pro $x = 15$ a $y = 96$ pro $x = 18$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, logicky správný postup s početními chybami (podle jejich míry) oceňte nejvýše 4 body. U nedokončeného postupu udělte 1 bod za zápis zadané rovnice v rozvinutém tvaru (tj. s mocninami základu 10), za jeho úpravu do součinnového tvaru s nesoudělnými činiteli 16 a 3 pak rovněž 1 bod.

2. a) Ukážeme, že v popsané situaci mohl na začátku u stolu sedět libovolný počet lidí větší než 2. Dva hráči to totiž být nemohli (to by v prvním kole vypadli ze hry buď oba, nebo žádný z nich, rozdělení dvou hlasů je totiž buď 1 : 1, nebo 2 : 0).

Jsou-li na začátku hráči aspoň tři, pak v prvním kole vypadne pouze jeden hráč A , když kupříkladu hráč A dá hlas sobě a všichni ostatní (jsou nejméně dva) ho dají témuž hráči B , $B \neq A$ (tedy i hráč B dá hlas sobě). Není to samozřejmě jediný způsob hlasování s požadovaným výsledkem.

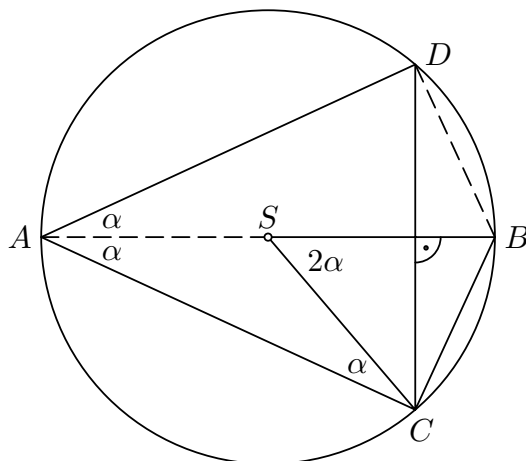
b) Vysvětlíme, proč jediný hráč ve hře nikdy zůstat nemůže. Opak by znamenal, že v posledním kole před nastalou situací, kdy ve hře bylo řekněme m hráčů, kde $m > 1$, by v důsledku jejich hlasování vypadlo $m - 1$ hráčů. Protože při tomto hlasování bylo rozdáno právě m hlasů a $m - 1$ hráčů (ti, co poté vypadli) dostalo právě jeden hlas, musel i zbylý m -tý hráč dostat právě jeden (zbylý) hlas, a tedy rovněž vypadnout, a to je spor.

Za úplné řešení části a) udělte 2 body, za úplné řešení části b) udělte 4 body. Za drobné argumentační nedostatky strhněte 1–2 body.

3. Kýžený vztah mezi obvody trojúhelníků ACD a SBC vyplýne, když pro délky jejich stran objevíme nerovnosti

$$|AC| < 2|SB|, \quad |AD| < 2|SC| \quad \text{a} \quad |CD| < 2|BC|.$$

První dvě z nich jsou důsledkem toho, že tětivy AC a AD dané kružnice jsou kratší než její průměr AB (obr. 1), třetí nerovnost zapsaná ve tvaru $\frac{1}{2}|CD| < |BC|$ je nerovností mezi délkami odvěsny a přepony dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků, na které je trojúhelník BCD rozdělen přímkou AB , jež je totiž (díky předpokladu $AB \perp CD$) osou tětivy CD . Dodejme, že stejně dobře lze využít i trojúhelníkovou nerovnost $|CD| < |BC| + |BD| = 2|BC|$.



Obr. 1

JINÉ ŘEŠENÍ. Označme α vnitřní úhly při základně AC rovnoramenného trojúhelníku SAC . Pak jeho vnější úhel při vrcholu S , totiž úhel CSB , má velikost 2α , kterou má i úhel CAD , neboť polopřímka AB je jeho osou (obr. 1). Rovnoramenné trojúhelníky ACD a SCB se tak shodují ve vnitřních úhlech při svých hlavních vrcholech A a S , a jsou tudíž podobné. Proto je poměr jejich obvodů roven poměru délek jejich ramen, a ten má skutečně hodnotu menší než 2, neboť ramena trojúhelníku ACD jsou kratší nežli průměr dané kružnice, zatímco ramena trojúhelníku SCB mají délku jejího poloměru.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za odhad délek AC , AD pomocí průměru dané kružnice v neúplném řešení udělte 1 bod. Za nerovnost $|CD| < 2|BC|$ udělte 1 bod, jen když je zdůvodněna; chybí-li toto zdůvodnění v jinak úplném řešení, strhněte 1 bod. Konečně 1 bod udělte i za objev, že trojúhelníky ACD a SCB jsou podobné. Za pouhou zmínku o jejich rovnoramennosti však žádný bod neuděluje.