

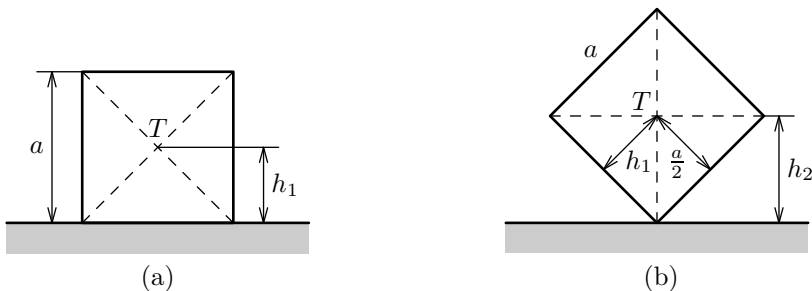
Řešení úloh krajského kola 57. ročníku Fyzikální olympiády

Kategorie E

Autor úloh: J. Jírů

FO57E3–1: Přemísťování bedny

Označme hranu bedny tvaru krychle $a = 40$ cm, vzdálenost, do které máme bednu přemístit $s = 2$ m, hmotnost bedny $m = 24$ kg, součinitel smykového tření $f = 0,15$.



Obr. 1: Přemísťování bedny (k úloze 1)

- a) Práce potřebná k posunutí bedny je

$$W = Fs = fmg s = 0,15 \cdot 24 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 2 \text{ m} = 72 \text{ J}.$$

2 body

- b) Při překlápění konáme práci jen do uvedení do rovnovážné polohy vratké, kdy je těžiště v nejvyšší poloze. Poté se bedna převrátí sama. Počáteční výška těžiště je $h_1 = a/2 = 20$ cm (viz obr. 1a). Konečnou výšku těžiště určíme jako polovinu úhlopříčky čtverce podle Pythagorovy věty (viz obr. 1b).

$$h_2 = \sqrt{h_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(20 \text{ cm})^2 + \left(\frac{40 \text{ cm}}{2}\right)^2} \doteq 28,3 \text{ cm}.$$

Těžiště zvětšilo svoji výšku nad podlahou o $h = h_2 - h_1 = 28,3 \text{ cm} - 20 \text{ cm} = 8,3 \text{ cm} = 0,083 \text{ m}$.

3 body

Při jednom překlápění se tak vykonala práce, která je rovna přírůstku polohové energie bedny $E_1 = mgh = 24 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 0,083 \text{ m} \doteq 19,9 \text{ J}$. Při jednom překlápění se bedna zároveň přemístila o délku jedné hrany, tj. o 40 cm, k přemístění o vzdálenost $s = 2$ m je třeba bednu překlápat 5krát. Vykonaná práce je $W_1 = 5E_1 = 5 \cdot 19,9 \text{ J} \doteq 100 \text{ J}$.

2 body

- c) Vykonaná práce při překlápění musí být rovna práci při posunutí se změněným součinitelem smykového tření, tedy

$$f' mgs = 5mgh.$$

Z rovnice plyne

$$f' = \frac{5mgh}{mgs} = \frac{5h}{s} = \frac{5 \cdot 0,083 \text{ m}}{2 \text{ m}} \doteq 0,21.$$

3 body

FO57E3–2: Dva sudy

Označme objem prvního sudu $V_1 = 760\text{ l}$, jeho hmotnost $m_1 = 68\text{ kg}$ a průměr jeho dna $d_1 = 92\text{ cm}$; jeho poloměr pak vyjde $r_1 = d_1/2 = 46\text{ cm}$. Průměr druhého sudu podle zadání je $d_2 = d_1/2 = 46\text{ cm}$, poloměr $r_2 = r_1/2 = 23\text{ cm}$.

- a) Plošný obsah dna roste s druhou mocninou průměru či poloměru. Dno druhého sudu má poloviční průměr, tudíž čtvrtinový plošný obsah. Při stejné výšce je též objem druhého sudu čtvrtinový, tedy $V_2 = V_1/4 = 760\text{ l}/4 = 190\text{ l}$.

Jiný způsob řešení: Objem prvního sudu je $V_1 = \pi r_1^2 h$. Ze vzorce plyne výška sudu

$$h = \frac{V_1}{\pi r_1^2} = \frac{0,760\text{ m}^3}{\pi \cdot (0,46\text{ m})^2} \doteq 1,14\text{ m} = 114\text{ cm}.$$

Objem druhého sudu je $V_2 = \pi r_2^2 h = \pi \cdot (0,23\text{ m})^2 \cdot 1,14\text{ m} \doteq 0,189\text{ m}^3 \doteq 190\text{ l}$. Výsledek se díky zaokrouhlování může o něco lišit od výsledku prvního řešení.

2 body

- b) Povrch prvního sudu je

$$S_1 = \pi r_1^2 + 2\pi r_1 h = \pi r_1^2 + 2\pi r_1 \frac{V_1}{\pi r_1^2} = \pi r_1^2 + 2 \frac{V_1}{r_1} = \pi (0,46\text{ m})^2 + 2 \cdot \frac{0,76\text{ m}^3}{0,46\text{ m}} \doteq 3,97\text{ m}^2.$$

Povrch druhého sudu je

$$\begin{aligned} S_2 &= \pi r_2^2 + 2\pi r_2 h = \pi r_2^2 + 2\pi r_2 \frac{V_1}{\pi r_1^2} = \pi \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 + 2 \frac{r_1}{2} \frac{V_1}{r_1^2} = \\ &= \pi \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 + \frac{V_1}{r_1} = \pi (0,23\text{ m})^2 + \frac{0,76\text{ m}^3}{0,46\text{ m}} \doteq 1,82\text{ m}^2. \end{aligned}$$

Hmotnost sudu je přímo úměrná jeho povrchu, tedy

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{S_2}{S_1}, \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{S_2}{S_1} m_1 = \frac{1,82\text{ m}^2}{3,97\text{ m}^2} \cdot 68\text{ kg} \doteq 31\text{ kg}. \quad \mathbf{3\text{ body}}$$

- c) Celý objem vody se nacházel nad dnem druhého sudu, nyní nad oběma dny. Plošný obsah dna prvního sudu je 4krát větší, plošný obsah obou dnů 5krát větší než obsah dna druhého sudu. Proto bude výška 5krát menší, tj. přibližně 23 cm.

2 body

- d) Výška těžiště vodního tělesa nad dnem se zmenšila z $h/2$ na $1/5 \cdot h/2 = h/10$, tj. o $\Delta h = h/2 - h/10 = 4h/10$. Polohová energie vody se zmenšila o (hustota vody $\rho_v = 1\,000\text{ kg/m}^3$)

$$\Delta E_p = m_v g \Delta h = V_2 \rho_v g \Delta h = 0,19\text{ m}^3 \cdot 1\,000\text{ kg/m}^3 \cdot 10\text{ N/kg} \cdot \frac{4}{10} \cdot 1,14\text{ m} \doteq 870\text{ J}.$$

Polohová energie vody se přeměnila na vnitřní energii, čímž se nepatrně (a prakticky neměřitelně) zvýšila její teplota.

3 body

FO57E3–3: Ochlazení džusu ledem

- a) Označme m_1 hmotnost džusu, $t_1 = 19^\circ\text{C}$ počáteční teplotu džusu, m_2 hmotnost ledu, $t_0 = 0^\circ\text{C}$ teplotu ledu a $l_t = 334\,000\text{ J/kg}$ měrné skupenské teplo tání ledu. Led ke svému roztání spotřebuje teplo, které odevzdá džus při ochlazení na bod mrazu. Džus nebo voda o objemu 2 dl má hmotnost $m_1 = \varrho_v V = 1\,000\text{ kg/m}^3 \cdot 0,000\,2\text{ m}^3 = 0,2\text{ kg}$. Platí rovnice

$$m_1 c (t_1 - t_0) = m_2 l_t,$$

v z níž získáváme

$$m_2 = \frac{m_1 c (t_1 - t_0)}{l_t} = \frac{0,2\text{ kg} \cdot 4\,200\text{ J/(kg} \cdot ^\circ\text{C}) \cdot (19^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C})}{334\,000\text{ J/kg}} \doteq 0,048\text{ kg} = 48\text{ g}.$$

2 body

- b) Džus při ochlazení odevzdá teplo, díky němuž led o hledané hmotnosti m_3 roztaje a z něj vzniklá voda zvýší teplotu džusu na konečnou hodnotu $t_2 = 18^\circ\text{C}$. Platí rovnice

$$m_1 c (t_1 - t_2) = m_3 l_t + m_3 c (t_2 - t_0).$$

Odtud dostáváme

$$m_3 = \frac{m_1 c (t_1 - t_2)}{l_t + c (t_2 - t_0)} = \frac{0,2\text{ kg} \cdot 4\,200\text{ J/(kg} \cdot ^\circ\text{C}) \cdot (19^\circ\text{C} - 18^\circ\text{C})}{334\,000\text{ J/kg} + 4\,200\text{ J/(kg} \cdot ^\circ\text{C}) \cdot (18^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C})} \doteq \doteq 0,002\,05\text{ kg} \doteq 2,1\text{ g}.$$

4 body

- c) Džus při ochlazení odevzdá teplo, díky němuž led o objemu $V_L = 4,0\text{ cm}^3 = 0,000\,004\text{ m}^3$ roztaje a teplota vzniklé vody se zvýší na hledanou konečnou hodnotu t_4 . Platí rovnice

$$m_1 c (t_1 - t_4) = \varrho_L V_L l_t + \varrho_L V_L c (t_4 - t_0).$$

Z rovnice vyjádříme

$$\begin{aligned} t_4 &= \frac{m_1 c t_1 - \varrho_L V_L l_t}{(m_1 + \varrho_L V_L) c} = \\ &= \frac{0,2\text{ kg} \cdot 4\,200\text{ J/(kg} \cdot ^\circ\text{C}) \cdot 19^\circ\text{C} - 920\text{ kg/m}^3 \cdot 0,000\,004\text{ m}^3 \cdot 334\,000\text{ J/kg}}{(0,2\text{ kg} + 920\text{ kg/m}^3 \cdot 0,000\,004\text{ m}^3) \cdot 4\,200\text{ J/(kg} \cdot ^\circ\text{C})} \doteq \\ &\doteq 17^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

4 body

FO57E3–4: Varná konvice

Označme síťové napětí $U = 230 \text{ V}$, příkon konvice $P_0 = 2000 \text{ W}$, délku kabelu $l = 60 \text{ m}$, průměr měděných vodičů $d = 1,5 \text{ mm}$, měrný odpor mědi $\varrho = 0,018 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$, hledaný odpor spirály R_0 , odpor kabelu R , napětí na spirále konvice U' a příkon odebíraný konvicí v altánku P'_0 . Kabel s konvicí si lze představit jako dva sériově spojené rezistory s odpory R a R_0 připojené ke zdroji o napětí U .

a) Odpor kabelu je

$$R = \varrho \frac{2l}{S} = \varrho \frac{2l}{\pi \frac{d^2}{4}} = 0,018 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m} \cdot \frac{2 \cdot 60 \text{ m}}{\pi \frac{(1,5 \text{ mm})^2}{4}} \doteq 1,2 \Omega. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Odpor spirály vychází

$$R_0 = \frac{U^2}{P_0} = \frac{(230 \text{ V})^2}{2000 \text{ W}} \doteq 26,5 \Omega. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

b) Napětí na spirále v altánku, kterou teče proud I , je

$$U' = R_0 I = R_0 \frac{U}{R_0 + R} = \frac{26,5 \Omega}{26,5 \Omega + 1,2 \Omega} \cdot 230 \text{ V} \doteq 220 \text{ V}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

c) Elektrický příkon spirály konvice v altánku vychází

$$P'_0 = \frac{U'^2}{R_0} = \frac{(220 \text{ V})^2}{26,5 \Omega} \doteq 1800 \text{ W}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

d) Pro ztrátový výkon v kabelu platí

$$P_z = \frac{(U - U')^2}{R} = \frac{(230 \text{ V} - 220 \text{ V})^2}{1,2 \Omega} \doteq 83 \text{ W}.$$

Hledaný poměr ztrátového výkonu a celkového výkonu odebíraného ze sítě pak vychází

$$\frac{P_z}{P'_0 + P_z} = \frac{83 \text{ W}}{1800 \text{ W} + 83 \text{ W}} \doteq 0,044 = 4,4 \%. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$