

66. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Najděte všechny trojice celých čísel (a, b, c) takové, že každý ze zlomků

$$\frac{a}{b+c}, \quad \frac{b}{c+a}, \quad \frac{c}{a+b}$$

má celočíselnou hodnotu.

2. Je dána kružnice p se středem K procházející bodem M a polokružnice q nad průměrem KM . Libovolným bodem L uvnitř úsečky KM vedeme kolmici ke KM . Ta protne polokružnici q v bodě Q a kružnici p v bodech P_1, P_2 tak, že $|P_1Q| > |P_2Q|$. Přímka MQ protne kružnici p ještě v bodě $R \neq M$. Dokažte, že pro obsahy S_1 a S_2 trojúhelníků MP_1Q a P_2RQ platí $1 < S_1 : S_2 < 3 + \sqrt{8}$.
3. V závislosti na reálném parametru k určete počet řešení soustavy rovnic

$$x^2 + kxy + y^2 = z,$$

$$y^2 + kyx + z^2 = x,$$

$$z^2 + kzx + x^2 = y$$

v oboru reálných čísel.

4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškou AD . Osy úhlů BAD, CAD protínají stranu BC po řadě v bodech E, F . Kružnice opsaná trojúhelníku AEF protíná strany AB, AC po řadě v bodech G, H . Dokažte, že přímky EH, FG a AD se protínají v jednom bodě.

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 10. ledna 2017

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.