

Řešení úloh krajského kola 58. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 4), J. Jírů (3)

1. a) Jestliže první kulička má hmotnost m , pak druhá kulička má hmotnost $(1-k) \cdot m$, třetí kulička má hmotnost $(1-k)^2 \cdot m$, n -tá kulička má hmotnost $(1-k)^{n-1} \cdot m$, kde $k = 0,02$.

Při všech srážkách platí zákon zachování hybnosti i zákon zachování mechanické energie. Při první srážce tedy platí

$$mv_1 = mu + (1-k)mv_2 \quad \text{a} \quad \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{(1-k)mv_2^2}{2},$$

kde u je rychlost první kuličky po srážce a v_2 rychlost druhé kuličky po srážce. Vyjádříme-li z těchto rovnic u a v_2 , dostáváme

$$u = \frac{k}{2-k}v_1 > 0 \quad \text{a} \quad v_2 = \frac{2}{2-k}v_1 > u > 0.$$

První kulička se tedy pohybuje stejným směrem jako druhá kulička, ale menší rychlostí, takže se s ní už nesrazí.

Rychlost třetí kuličky po srážce s druhou kuličkou pak bude $v_3 = \frac{2}{2-k}v_2 = \left(\frac{2}{2-k}\right)^2 v_1$, rychlost čtvrté kuličky bude $v_4 = \left(\frac{2}{2-k}\right)^3 \cdot v_1$ a tak dále.

Rychlost n -té kuličky pak bude $v_n = \left(\frac{2}{2-k}\right)^{n-1} v_1$. (1)

Pro $n=10$ je $v_{10} = 0,11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4 body

- b) Do vztahu (1) dosadíme $v_n = 2v_1$, upravíme a vyřešíme exponenciální rovnici

$$2v_1 = \left(\frac{2}{2-k}\right)^{n-1} v_1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\log 2}{\log \left(\frac{2}{2-k}\right)} + 1 \doteq 70.$$

2 body

- c) Pro n kuliček nastane $(n-1)$ srážek, hledaná doba t je součtem $(n-1)$ dob. Označme $t_1 = \frac{l}{v_1}$ dobu pohybu první kuličky do prvního nárazu. Obecně i -tá kulička se pohybuje do i -tého nárazu po dobu

$$t_i = \frac{l}{v_i} = \frac{l}{v_1} \left(\frac{2-k}{2}\right)^{i-1},$$

kde $i = 2, \dots, n-1$. Pak

$$t = \sum_{i=2}^{n-1} t_i = \frac{l}{v_1} \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{2-k}{2}\right)^{i-1}.$$

Jde tedy o geometrickou posloupnost s $(n - 1)$ členy, jejíž první člen je $a_1 = \frac{l}{v_1}$ a kvocient $q = \frac{2 - k}{2} < 1$. Součet této řady pak je

$$t = a_1 \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} = \frac{l}{v_1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2-k}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{2-k}{2}} = \frac{2l}{kv_1} \left[1 - \left(\frac{2-k}{2}\right)^{n-1} \right].$$

Pro $n = 10$ je $t = 8,6$ s, pro $n = 70$ je $t = 50$ s.

4 body

2. Aby se paprsky vrátily zpět ke zdroji, musí po průchodu čočkou dopadnout buď do vrcholu zrcadla, nebo musí dopadnout na zrcadlovou plochu kolmo. Úloha má tedy dvě řešení.

2 body

1) Obraz zdroje po zobrazení čočkou leží ve vrcholu zrcadla.

a) Pak podle zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d - v} = \frac{1}{f} \quad \text{plyne} \quad a = \frac{f(d - v)}{d - v - f} = 70 \text{ cm.}$$

b) Po obrácení zrcadla leží skutečný obraz zdroje vytvořený čočkou ve vzdálenosti $a_1 = 2v$ před vrcholem zrcadla. Ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a'_1} + \frac{1}{2v} = \frac{2}{R} \quad \text{určíme polohu jeho obrazu:} \quad a'_1 = \frac{2vR}{4v - R} = 12 \text{ cm.}$$

Obraz vytvořený zrcadlem bude ve vzdálenosti 12 cm před vrcholem zrcadla a ve vzdálenosti $d + v - a'_1 = 20$ cm za čočkou, tedy v jejím ohnisku. Proto obraz vytvořený čočkou bude v nekonečnu.

4 body

2. Obraz zdroje po zobrazení čočkou leží ve středu křivosti zrcadla.

a) Pak z $\frac{1}{a} + \frac{1}{d + R - v} = \frac{1}{f}$ plyne $a = \frac{f(d + R - v)}{d + R - v - f} = 49 \text{ cm.}$

b) Po obrácení zrcadla leží skutečný obraz vytvořený čočkou ve vzdálenosti $a_1 = R - 2v$ za vrcholem zrcadla. Ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a'_1} - \frac{1}{R - 2v} = \frac{2}{R} \quad \text{určíme polohu jeho obrazu:} \quad a'_1 = \frac{(R - 2v)R}{3R - 4v} = 1,2 \text{ cm.}$$

Obraz vytvořený zrcadlem bude ve vzdálenosti 1,2 cm před vrcholem zrcadla a ve vzdálenosti $d + v - a'_1 = 30,8$ cm za čočkou. Ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{d + v - a'_1} = \frac{1}{f} \quad \text{dostaneme} \quad b = \frac{f(d + v - a'_1)}{d + v - a'_1 - f} = 57 \text{ cm.}$$

Obraz vytvořený čočkou při druhém průchodu paprsků bude ve vzdálenosti 57 cm před čočkou.

4 body

3. a) Při rozepnutém spínači S2 mají topná tělesa elektrické příkony

$$P_1 = R_1 \left(\frac{U}{R_1 + R_2} \right)^2 = 9 \text{ W},$$
$$P_2 = R_2 \left(\frac{U}{R_1 + R_2} \right)^2 = 13,5 \text{ W}.$$

Při sepnutém spínači S2 je odpor paralelně spojených rezistorů

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 2 \Omega$$

a topná tělesa mají elektrické příkony

$$P'_1 = R_1 \left(\frac{U}{R_1 + R_{23}} \right)^2 = 25 \text{ W},$$
$$P'_2 = R_2 \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{U}{R_1 + R_{23}} \right)^2 = \frac{25}{6} \text{ W} = 4,17 \text{ W}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

Teplo přijaté vodou v každém kalorimetru v okamžiku vyrovnání teplot je

$$Q_1 = m_1 c \Delta t = P_1 \tau_0 + P'_1 \tau, \quad (1)$$

$$Q_2 = m_2 c \Delta t = P_2 \tau_0 + P'_2 \tau. \quad (2)$$

Ze vztahů plyne

$$\tau = \frac{m_1 P_2 - m_2 P_1}{m_2 P'_1 - m_1 P'_2} \cdot \tau_0 = 44 \text{ s}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

b) Přírůstek teploty získáme z rovnice (1) nebo z rovnice (2):

$$\Delta t = \frac{P_1 \tau_0 + P'_1 \tau}{m_1 c} = \frac{P_2 \tau_0 + P'_2 \tau}{m_2 c} = 3,0^\circ \text{C}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

4. a) Využitím ZZE: $\frac{mv_0^2}{2} = fmg s \Rightarrow s = \frac{v_0^2}{2fg}$. **1 bod**

Využitím 2. pohybového zákona:

$$F = ma = fmg \Rightarrow a = fg; s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2fg}.$$

b) Označme v souřadnici okamžité rychlosti kotouče vzhledem k desce, x souřadnici polohy kotouče měřenou ve směru rychlosti $\mathbf{v}_0$. Využitím 2. pohybového zákona: $ma = -bv$:

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} = -bv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = -m \frac{dv}{b} \Rightarrow -m \int_{v_0}^0 \frac{dv}{b} = \int_0^{s_1} dx \Rightarrow s_1 = \frac{mv_0}{b}.$$

3 body

- c) Protože hmotnosti kotoučů jsou v porovnání s hmotností desky zanedbatelné, můžeme pohyb desky zkoumat samostatně a sílu tření, kterou kotouče působí na desku, můžeme zanedbat. Na desku působí ze strany stolu síla tření o velikosti $F_t = 2fMg$. Využitím ZZE:

$$\frac{Mv_0^2}{2} = 2fMgs_d \Rightarrow s_d = \frac{v_0^2}{4fg}.$$

Kotouče na desce se vzhledem k podlaze rovněž zpomalují a každý z nich urazí dráhu $s = \frac{v_0^2}{2fg}$, pokud z desky nesklouznou. Z desky sklouznou všechny kotouče,

které se nacházely ve vzdálenostech menších než $s - s_d = \frac{v_0^2}{4fg}$ od předního okraje

desky. Počet těchto kotoučů pak bude $n = \left\lfloor \frac{v_0^2}{4fgl} \right\rfloor + 1$.

(Hranatá závorka znamená celou část čísla v závorce).

3 body

- d) V soustavě spojené s podlahou z 2. pohybového zákona

$$ma = -b(v - v_0) \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -b \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt} \right),$$

kde x, x_0 jsou souřadnice kotouče a desky a v je souřadnice okamžité rychlosti kotouče. Pak

$$mdv = -b(dx - dx_0),$$

$$m \int_{v_0}^0 \frac{dv}{b} = x_0 - x \Rightarrow x - x_0 = \frac{mv_0}{b}.$$

Vzhledem k desce urazí každý kotouč dráhu $s_1 = x - x_0 = \frac{mv_0}{b}$, pokud z desky

nesklouzne. Počet kotoučů, které z desky sklouznou, tedy bude $n_1 = \left\lfloor \frac{mv_0}{bl} \right\rfloor + 1$.

(Hranatá závorka znamená celou část čísla v závorce). Tento počet nezávisí na velikosti tření mezi deskou a podlahou.

3 body