

66. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie B

1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b , pro něž platí

$$a + \frac{66}{a} = b + \frac{66}{b}.$$

2. V rovině je dáno 2017 takových bodů, že z každé trojice lze vybrat dva, jejichž vzdálenost je menší než 1. Dokažte, že existuje kruh o poloměru 1, který obsahuje aspoň 1 009 daných bodů.
3. V rovině jsou dány kružnice k a l , které se protínají v bodech E a F . Tečna ke kružnici l sestavená v bodě E protíná kružnici k v bodě H ($H \neq E$). Na oblouku EH kružnice k , který neobsahuje bod F , zvolme bod C ($E \neq C \neq H$) a průsečík přímky CE s kružnicí l označme D ($D \neq E$). Dokažte, že trojúhelníky DEF a CHF jsou podobné.
4. Určete všechny hodnoty reálného parametru p tak, aby rovnice

$$2017 \cdot \left| 1 - \left| 1 - \left| 1 - x \right| \right| \right| = 2016x + p$$

měla právě tři řešení v oboru reálných čísel.

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 11. dubna 2017

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.